Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Cursos: MEC, LET, LEGM

Ficha de Trabalho da 5ª Aula Prática

1. Calcule $\int_\gamma f(z)\,dz$ para:

   (a) $f(z) = z^2$, $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [-\pi/2, \pi/2])$;

   (b) $f(z) = \operatorname{Re} z$, $\gamma(t) = t + it^2$ $(t \in [0,1])$;

   (c) $f(z) = 1/z$, $\gamma(t) = e^{-it}$ $(t \in [0, 8\pi])$;

   (d) $f(z) = e^z$, γ os segmentos $[0,1] \cup [1, 1+i] \cup [1+i, i]$;

   (e) $f(z) = \sqrt{z}$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, onde o ramo de $\sqrt{z}$ é tal que $\sqrt{1} = 1$, e γ é percorrida de 1 para -1.

2. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designa-se por $\gamma(a; r)$ a curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ percorrida uma vez no sentido positivo. Calcule $\int_\gamma (1 + z^2)^{-1}\,dz$ para:

   (a) $\gamma = \gamma(1; 1)$;

   (b) $\gamma = \gamma(i; 1)$;

   (c) $\gamma = \gamma(-i; 1)$;

   (d) $\gamma = \gamma(0; 2)$;

   (e) $\gamma = \gamma(3i; \pi)$;

3. Mostre que:

   (a) $\left|\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z}\,dz\right| \leq 4\pi$;

   (b) $\left|\oint_{|z|=R} \frac{z-1}{z+1}\,dz\right| \leq 2\pi \frac{R(R+1)}{|R-1|}$;

   (c) $\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^4}\,dz\right| \leq \pi R^{-3}$, $\gamma(t) = Re^{it}$ $(t \in [0, \pi])$;

4. Seja $R > 0$. Mostre

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\,d\theta = 1 \quad (0 \leq r < R).$$

   Sugestão: Considere o integral da função $(R+z)/(z(R-z))$ sobre um caminho adequado.