Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Cursos: MEC, LET, LEGM

Ficha de Trabalho da 13ª Aula Prática

1. Calcule as transformadas de Laplace e as regiões de convergência das funções definidas em

   $t \geq 0$ pelas expressões seguintes:

   (a) $f(t) = \operatorname{ch}(at)$ (b) $f(t) = t\operatorname{sen}(at)$

   (c) $f(t) = e^{at}\cos(bt)$ (d) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}$, $(t > 0)$

2. Calcule a inversa da Transformada de Laplace de

   (a) $(s^2-1)^{-2}$ (b) $6(s^4+10s^2+9)^{-1}$

   (c) $\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$ (d) $\dfrac{1}{(s-1)^5}$

3. Utilizando a Transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   a) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
   b) $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$, $\omega^2 \neq 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   c) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ sendo

   $$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{se } 0 \leq t < \pi \text{ e } t \geq 2\pi \end{cases}$$

4. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se } \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

5. Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

6. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

(a) a série de Fourier associada a f;

(b) a série de senos associada a f;

(c) a série de cosenos associada a f.