Teorema

Seja E um espaço vectorial seminormado e $F \subset E$ um subespaço com dimensão finita. Então, para cada $f \in E$, existe pelo menos um elemento ϕ^* que é melhor aproximação de f em F, relativamente à seminorma.

Definição (Haar)

Seja $F \subset C([a,b])$ um subespaço com dimensão finita n. Diz-se que F satisfaz a condição de Haar se todo o elemento não nulo de F tem no máximo $n-1$ zeros em $[a,b]$.

Teorema (Haar)

Seja $F \subset C([a,b])$ um subespaço com dimensão finita n. A melhor aproximação uniforme de f em F é única $\forall f \in C([a,b])$ sse F satisfaz a condição de Haar.

Teorema (Chebyshev)

Seja $F \subset C([a,b])$ um subespaço com dimensão finita n que satisfaz a condição de Haar. Dada um função $f \in C([a,b])$, ϕ é a melhor aproximação uniforme de f em F sse existem $n+1$ pontos x_i, com $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$ tais que

(i) $f(x_i) - \phi(x_i) = -\left(f(x_{i+1}) - \phi(x_{i+1})\right)$, $i = 0, 1, ..., n-1$

(ii) $|f(x_i) - \phi(x_i)| = \|f - \phi\|_\infty = \delta$, $i = 0, 1, ..., n$.

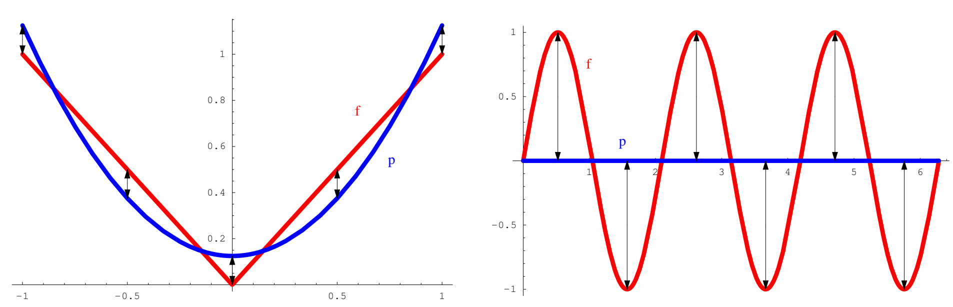

Figure 1. Na primeira figura $f(x) = |x|$ e $p(x) = x^2 + \frac{1}{8}$; na segunda $f(x) = \sin(3x)$ e $p(x) = 0$.