Método de Newton

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}, \quad m = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

Teorema (Convergência local do método de Newton)

Seja $f \in C^2(I)$, $I = [a,b]$ e suponhamos que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ e $\exists z \in [a,b]$ tal que $f(z) = 0$. Então existe $r > 0$ tal que $\forall x_0 \in I_r = [z-r, z+r] \subseteq I$ o método de Newton converge para z e a convergência é pelo menos quadrática.

Teorema (Condições suficientes para convergência) - Critério 1

Seja $f \in C^2([a,b])$ satisfazendo:

1) $f(a)f(b) < 0$ (existência de raíz)

2) $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$ (unicidade de raíz)

3) $f''(x) > 0$ ou $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$ (f(x) não muda o sentido da concavidade em $[a,b]$)

4) $\frac{|f(a)|}{|f'(a)|} < b - a \quad e \quad \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} < b - a$.

Então o método de Newton converge para z, $\forall x_0 \in [a,b]$.

Teorema (Condições suficientes para convergência) - Critério 2

Se as condições 1), 2) e 3) do Critério 1 forem válidas e x_0 é escolhido de modo a que $f(x_0)f''(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, então o método de Newton converge para a solução de $f(x) = 0$ e a convergência será monótona.

Fórmula de Erro

$$|e_{m+1}| = |z - x_{m+1}| \leq \frac{max_{x\in[a,b]}\, |f''(x)|}{2\ min_{x\in[a,b]}\, |f'(x)|}\, |z - x_m|^2$$