Teorema do Ponto Fixo

Seja g definida em $I = [a, b]$ tal que

(i) $g \in C^1(I)$

(ii) $g(I) \subseteq I$

(iii) $Max_{x \in I} |g'(x)| = L, \quad 0 < L < 1.$

Então

a) g tem um e um só ponto fixo em I, ou seja, existe um único $z \in I$ tal que $g(z) = z$.

b) A sucessão gerada por g, ou seja $x_{m+1} = g(x_m), \ m = 0, 1, 2, ...$ converge para z, $\forall x_0 \in I$.

Fórmulas de Erro

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{L}{1-L} |x_{m+1} - x_m|, \ m = 0, 1, 2, ...$$

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{L^{m+1}}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$|z - x_{m+1}| \leq L^m |z - x_0|$$

Teorema (Condições suficientes para divergência)

Seja g um função diferenciável. Se $|g'(z)| > 1$, ou seja, se $|g'(x)| > 1$ num dado intervalo I contendo z, então não existe nenhum $x_0 \in I$ tal que $x_n \to z$.