

# O QUE É UM CÍRCULO?

DIOGO OLIVEIRA E SILVA

**RESUMO.** De todas as curvas fechadas com um determinado comprimento, a circunferência é aquela que delimita a maior área. Porquê? Uma viagem pelo mundo das desigualdades geométricas responde à pergunta e revela como estender esta ideia a dimensões mais elevadas.

## 1. INTRODUÇÃO

Dido, a primeira rainha de Cartago (que se pensa ter vivido em meados do século IX a.C.), provinha de uma família claramente disfuncional. O seu irmão, Pigmaleão, terá assassinado o seu marido (que também era seu tio), e Dido, auxiliada pelas divindades da época, partiu para o Norte de África a todo o vapor. Uma vez lá chegada, travou conhecimento com Jarbas, um rei local, e com ele fez um dos negócios mais lucrativos da História. Este é-nos descrito por Virgílio nas seguintes estrofes d'*A Eneida* [9]:

Aqui os Púnicos Reinos tens presentes,  
Os Tírios, e de Agenor a cidade,  
Os limites porém da Líbia ardentes,  
Gente por guerra indómita em verdade:  
Dido, fugindo às iras insolentes  
De seu irmão, tem dela a potestade,  
A injúria é longa, longos os rodeios,  
Mas direi os princípios por bons meios.  
[...]

Da terra lhe descobre alguns antigos  
Tesouros, grande cópia de ouro, e prata  
Auxílio do caminho, e c'os amigos  
Avisos Dido da fugida trata:  
Uns por temor, como outros por i'migos  
Do tirano, que a todos desbarata,  
Para a seguir em tudo se aparelham,  
E como o caso pede se aconselham.

As naus tomam, que acaso aparelhadas  
No porto estão, e as cargam do luzente  
Metal. Do avaro Pigmaleão levadas  
São as riquezas pelo mar patente:  
Do feito a Dido são as honras dadas;  
E aqui vieram ter onde a presente  
Verás os grandes muros, o grão povo

---

Publicado em *Números, cirurgias e nós de gravata: 10 anos de Seminário Diagonal no IST*, J. P. Boavida, R. P. Carpentier, L. Cruz-Filipe, P. S. Gonçalves, E. Grifo, D. Henriques, A. R. Pires (editores), IST Press, 2012.

Copyright © 2012, IST Press.

E da nova Cartago o alcançar novo.

O chão aqui compraram, que do feito  
Tem o nome de Birna derivado:  
Quanto pudesse ser largo, ou estreito,  
C'uma taurina pele rodeado.  
[...]

A missão de Dido era a seguinte: delimitar a maior quantidade de terreno com uma pele de boi. A estratégia a que recorreu, brilhante: cortou a pele em tiras finíssimas e com elas formou uma circunferência suficientemente grande para dentro dela nascer uma próspera cidade, resolvendo assim (correctamente!) o primeiro *problema isoperimétrico* da História. Como o nome indica, este problema consiste em tomar todas as curvas fechadas com um determinado perímetro fixado à partida, e determinar aquela que delimita a maior área.

Fora Dido uma matemática moderna e não uma rainha da Antiguidade, o raciocínio que desenvolveu poderia ter sido semelhante ao conteúdo das páginas que se seguem...

## 2. A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA NO PLANO

De todas as curvas planas e fechadas de comprimento  $C$ , a circunferência de perímetro  $C$  é aquela que limita a maior área. Dito de outro modo, tome-se uma qualquer curva fechada no plano, digamos  $\Gamma$ , de comprimento  $C$ , e seja  $A$  a área da região delimitada por  $\Gamma$ . Então

$$(1) \quad C^2 \geq 4\pi A,$$

e a desigualdade é uma igualdade se e só se  $\Gamma$  for uma circunferência. Para verificar a validade da desigualdade isoperimétrica (1), tome-se uma parametrização

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

de  $\Gamma$ , isto é, uma função  $\gamma$  diferenciável por troços, injetiva no intervalo aberto  $]0, 2\pi[$  e tal que  $\gamma([0, 2\pi]) = \Gamma$  e  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ . Assumimos ainda que a parametrização se faz a velocidade constante, isto é, que  $\|\gamma'(t)\|$  não depende de  $t$ . Seja  $U$  a região do plano delimitada por  $\Gamma$ , ou seja, o único conjunto limitado  $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  com fronteira  $\partial U = \Gamma$ . A Figura 1 ilustra esta situação.

O comprimento  $C$  de  $\Gamma$  pode ser expresso através de um integral de linha:

$$C = \int_{\Gamma} d\ell = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Alternativamente, recorrendo à parametrização por comprimento de arco  $s = \frac{C}{2\pi}t$ , temos a seguinte identidade:

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} x'(t)^2 + y'(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 dt = \left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 2\pi = \frac{C^2}{2\pi}.$$

Por outro lado, a área  $A$  de  $U$  é dada por um integral duplo que, por sua vez, também pode ser expresso através de um integral de linha recorrendo ao teorema de Green:<sup>1</sup>

$$(3) \quad A = \iint_U dx dy = - \int_{\partial U = \Gamma} y dx = - \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt.$$

---

<sup>1</sup>Para o enunciado geral do teorema de Green, bem como para algumas noções de cálculo vectorial usadas até aqui e que poderão ser desconhecidas para o leitor, veja-se o artigo [1], nesta colectânea.

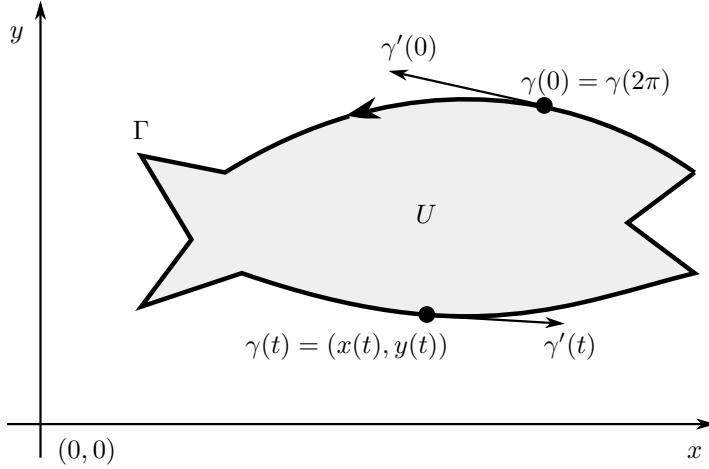


FIGURA 1: Exemplo de um conjunto limitado  $U$  com fronteira  $\Gamma$  “bem comportada” e respectiva parametrização  $\gamma$ .

Combinando as identidades (2) e (3), temos que:

$$\begin{aligned} C^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} (x'(t)^2 + y'(t)^2 + 2y(t)x'(t)) dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (x'(t) + y(t))^2 dt + 2\pi \int_0^{2\pi} (y'(t)^2 - y(t)^2) dt. \end{aligned}$$

Uma vez que o primeiro integral é não negativo, a desigualdade (1) seguiria se conseguíssemos mostrar que

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} y'(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} y(t)^2 dt.$$

Qualquer esforço no sentido de provar (4) nesta generalidade seria inglório, como se vê tomando  $y(t)$  constante. Precisamos de hipóteses adicionais. Uma das liberdades que temos no nosso problema é a de redefinir o sistema de coordenadas. Fazendo-o por forma a que o eixo das abcissas passe pelo centro de gravidade da região  $U$  delimitada pela curva  $\Gamma$ , podemos assumir que

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} y(t) dt = 0.$$

Temos então a desigualdade de Wirtinger: se  $y = y(t)$  for uma função real, suficientemente regular e periódica de período  $2\pi$  que satisfaz a hipótese (5), então vale a desigualdade (4), que é uma igualdade se e só se  $y(t) = a \cos t + b \sin t$  para alguns  $a, b \in \mathbb{R}$ .

A prova desta desigualdade é muito simples se usarmos as ferramentas apropriadas. Uma função  $f$ , suficientemente regular e periódica (de período  $2\pi$ , digamos), admite uma expansão em série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int},$$

cujos coeficientes são dados pela expressão

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Note-se que  $\widehat{f}(0) = 0$  se e só se  $\int f = 0$ , que é precisamente o conteúdo da hipótese (5). Estamos no bom caminho! Por outro lado, uma integração por partes mostra que a transformada de Fourier conjuga as operações de diferenciação e multiplicação por  $n$ :

$$(6) \quad \widehat{f}'(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(-in)e^{-inx} dx = in\widehat{f}(n).$$

A terceira e última propriedade das séries de Fourier de que faremos uso é referida na literatura como o teorema de Parseval, que basicamente diz que a transformada de Fourier é uma isometria no espaço  $L^2$  das funções de quadrado integrável. Em termos mais concretos, temos uma igualdade

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2.$$

Vejamos como a passagem para o espaço de Fourier torna a prova da desigualdade de Wirtinger assustadoramente fácil. Comecemos por expandir  $y$  em série de Fourier:

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{y}(n)e^{int}.$$

Como já foi notado, a hipótese (5) implica  $\widehat{y}(0) = 0$ , pelo que esta última soma é de facto sobre  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Por outro lado, de (6) sabemos que

$$y'(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{y}'(n)e^{int} = i \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} n\widehat{y}(n)e^{int}.$$

A desigualdade pretendida (4) decorre imediatamente disto e de duas aplicações do teorema de Parseval (assinaladas com  $P$ ):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y'(t)^2 dt \stackrel{P}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{y}'(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |n\widehat{y}(n)|^2 \geq \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{y}(n)|^2 \stackrel{P}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t)^2 dt.$$

Note-se que para a desigualdade valer é absolutamente necessário que  $\widehat{y}(0) = 0$ . Por outro lado, a desigualdade é uma igualdade se e só se

$$y(t) = \widehat{y}(-1)e^{-it} + \widehat{y}(1)e^{it} = a \cos t + b \sin t$$

para  $a = \widehat{y}(-1) + \widehat{y}(1)$  e  $b = -i(\widehat{y}(-1) - \widehat{y}(1))$ . Note-se que  $a$  e  $b$  são de facto números reais uma vez que, por construção,  $y(t) \in \mathbb{R}$  para todo o  $t \in [0, 2\pi]$ .

Em suma, acabámos de provar a desigualdade isoperimétrica no plano (1). O leitor é convidado a percorrer o argumento apresentado nas últimas páginas e a convencer-se de que a desigualdade em questão é uma igualdade se e somente se  $\Gamma$  é uma circunferência. Seguidamente, o leitor dedicado deverá sentir um desejo irreprimível de tentar generalizar a linha de raciocínio anterior para dimensões mais elevadas. Disso nos ocuparemos nas próximas secções.

### 3. A DESIGUALDADE DE BRUNN–MINKOWSKI

Para simplificar a exposição, vamos trabalhar no plano  $\mathbb{R}^2$ , e mais tarde indicaremos como generalizar a discussão ao espaço euclidiano  $d$ -dimensional. Começamos por introduzir notação relevante e definir alguns conceitos que nos serão úteis.

Seja então  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Denotamos a área de  $A$  por  $m(A)$ , e a função característica de  $A$  por  $1_A$ . Esta última é definida do seguinte modo:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

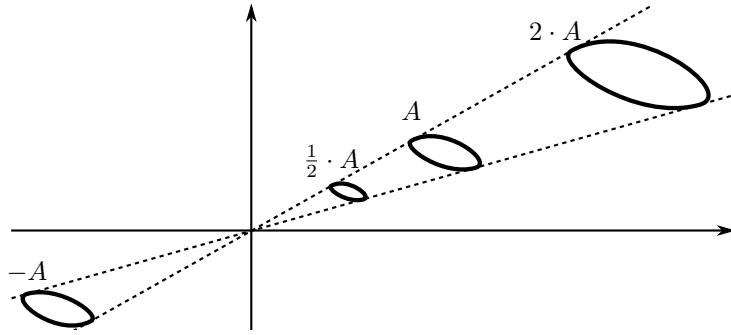


FIGURA 2: Dilatações de um conjunto no plano.

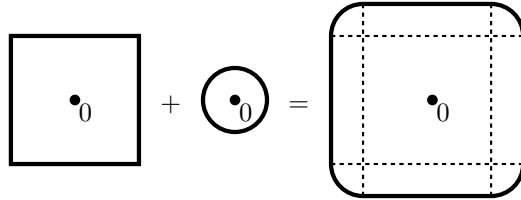


FIGURA 3: A soma de Minkowski de um quadrado com uma bola.

Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos o conjunto dilatado

$$\lambda \cdot A = \{\lambda x : x \in A\},$$

e chamamos a atenção para o facto, óbvio mas útil, de que  $m(\lambda \cdot A) = |\lambda|^2 m(A)$  (isto decorre de estarmos a trabalhar no espaço bidimensional). A Figura 2 ilustra este conceito.

Se  $B$  for outro subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , definimos a soma (de Minkowski) de  $A$  e  $B$  como

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Por exemplo, a soma da bola unitária  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  com ela própria iguala a bola centrada na origem de raio 2. Por outro lado, a soma de um quadrado  $Q$  de lado  $\ell$  centrado na origem com uma bola  $B = \varepsilon \cdot B(0, 1)$  de raio  $\varepsilon$  encontra-se representada na Figura 3.

Dizemos que o conjunto  $A$  é convexo se  $(1 - \theta)x + \theta y \in A$  sempre que  $\theta \in [0, 1]$  e  $x, y \in A$ . Em termos mais geométricos, isto quer dizer que o segmento de recta que une quaisquer dois pontos do conjunto está inteiramente contido no conjunto.

Com a notação introduzida anteriormente, é fácil ver que o conjunto  $A$  é convexo se e somente se

$$(7) \quad \lambda \cdot A + \mu \cdot A = (\lambda + \mu) \cdot A, \quad \text{para todos os } \lambda, \mu \geq 0.$$

Uma das implicações é trivial. Para a outra, escolham-se  $\lambda, \mu \geq 0$  não ambos nulos. Se  $A$  é convexo e  $a_1, a_2 \in A$ , então

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} a_2 \in A,$$

uma vez que  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$  e  $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$  são dois números reais entre 0 e 1 cuja soma é 1. A inclusão contrária vale sempre, e isto conclui a verificação de (7). Temos assim uma caracterização de convexidade expressa em termos da soma de Minkowski.

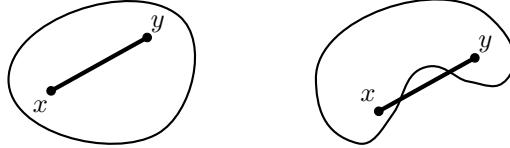


FIGURA 4: Um conjunto convexo e um conjunto não convexo.

O nosso próximo objectivo é responder à seguinte pergunta:

Como é que a área de  $A + B$  se relaciona com as áreas de  $A$  e de  $B$ ?

Começamos por notar que é impossível majorar  $m(A + B)$  exclusivamente em termos de  $m(A)$  e  $m(B)$ . Este fenómeno manifesta-se já no caso unidimensional da recta real: é possível exibir um conjunto  $K \subset [0, 1]$  de comprimento 0 (mais rigorosamente, de medida nula) tal que  $K + K$  tem comprimento 2! Este facto aparentemente paradoxal e no mínimo perturbador revela várias das subtilezas da teoria da medida na recta real. O conjunto  $K$  é o chamado conjunto de Cantor, e a Figura 5 ilustra a sua construção.

Para vermos porque é que o conjunto  $K$  tem comprimento 0, começemos por designar por  $C_n$  o comprimento do conjunto obtido no  $n$ -ésimo passo da construção ilustrada na Figura 5. O comprimento  $C_n$  está relacionado com  $C_{n-1}$  através da fórmula recursiva

$$C_n = C_{n-1} - 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n},$$

uma vez que o  $n$ -ésimo passo da construção consiste em retirar ao conjunto obtido no passo anterior  $2^{n-1}$  intervalos de comprimento  $1/3^n$ . Convidamos o leitor a provar por indução que  $C_n = (\frac{2}{3})^n$ , o que implica que

$$m(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Algumas das fascinantes propriedades do conjunto  $K$ —incluindo o facto de  $K$  ter a potência do contínuo, isto é, tantos elementos como o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais—encontram-se descritas em [3]. Por fim, deixamos como um agradável exercício de álgebra a verificação de que  $K + K = [0, 2]$ .

A esperança é, então, que uma desigualdade do tipo

$$(8) \quad m(A + B)^\alpha \geq C_\alpha(m(A)^\alpha + m(B)^\alpha)$$

valha para algum parâmetro  $\alpha > 0$  e constante  $C_\alpha > 0$ . Uma das dificuldades consiste em tornar a constante  $C_\alpha$  (que pode, *a priori*, depender de  $\alpha$ ) independente dos conjuntos  $A$  e  $B$  escolhidos. Tomando para  $B$  um conjunto com um só ponto,



FIGURA 5: Os primeiros seis passos no processo de construção do conjunto de Cantor.

vemos que a constante óptima  $C_\alpha$  em (8), a existir, deve ser menor ou igual a 1. De facto, tome-se  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $B = \{x\}$ . Temos então que  $m(B) = 0$ . Por outro lado, a área de um conjunto é invariante por translação:  $m(A + x) = m(A)$ . Decorre que

$$m(A + B)^\alpha = m(A + x)^\alpha = m(A)^\alpha = m(A)^\alpha + 0 = m(A)^\alpha + m(B)^\alpha.$$

Partimos agora em busca de um valor plausível para  $\alpha$ , e para tal começamos por analisar o exemplo ilustrado na Figura 3. Nesse caso, a soma de Minkowski do quadrado  $Q$  de lado  $\ell$  com a bola  $B$  de raio  $\varepsilon$  consiste num quadrado arredondado composto por uma cópia de  $Q$ , quatro rectângulos de área  $\ell\varepsilon$  e quatro quartos de bola de raio  $\varepsilon$ . Temos então que

$$\begin{aligned} m(Q + B) &= m(Q) + 4\ell\varepsilon + m(B) \geq m(Q) + 2\sqrt{\pi}\ell\varepsilon + m(B) \\ &= m(Q) + 2\sqrt{m(Q)m(B)} + m(B) = (\sqrt{m(Q)} + \sqrt{m(B)})^2, \end{aligned}$$

o que implica

$$m(Q + B)^{1/2} \geq m(Q)^{1/2} + m(B)^{1/2}.$$

Para o caso geral, tome-se um conjunto convexo  $A \subset \mathbb{R}^2$  e a sua versão dilatada  $B = \lambda \cdot A$  para algum  $\lambda > 0$ . A caracterização (7) diz-nos que

$$m(A + B) = m(A + \lambda \cdot A) = m((1 + \lambda) \cdot A) = (1 + \lambda)^2 m(A).$$

Substituindo em (8), vemos que uma desigualdade desse tipo só pode ocorrer se

$$(1 + \lambda)^{2\alpha} \geq 1 + \lambda^{2\alpha} \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Paremos para pensar. Sejam  $a$  e  $b$  números positivos. Se  $\gamma \geq 1$ , temos que

$$(a + b)^\gamma \geq a^\gamma + b^\gamma.$$

Uma maneira elegante de verificar esta afirmação consiste em integrar a desigualdade elementar  $(a + t)^{\gamma-1} \geq t^{\gamma-1}$  de 0 a  $b$ :

$$(a + b)^\gamma - a^\gamma = \gamma \int_0^b (a + t)^{\gamma-1} dt \geq \gamma \int_0^b t^{\gamma-1} dt = b^\gamma.$$

Se, por outro lado,  $0 \leq \gamma \leq 1$ , então vale a desigualdade oposta entre os integrais, uma vez que, nesse caso,  $(a + t)^{\gamma-1} \leq t^{\gamma-1}$ . Ou seja, se  $0 \leq \gamma \leq 1$ , então

$$(a + b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma.$$

Em suma: uma condição necessária para que (8) ocorra é que  $2\alpha \geq 1$ ; equivalentemente,  $\alpha \geq 1/2$ . Neste caso, o melhor cenário possível corresponde à realidade e é-nos descrito pela desigualdade de Brunn–Minkowski: se  $A$  e  $B$  forem subconjuntos não vazios, abertos e limitados de  $\mathbb{R}^2$ , então:

$$(9) \quad m(A + B)^{1/2} \geq m(A)^{1/2} + m(B)^{1/2}.$$

Um bom complemento a uma desigualdade consiste na caracterização dos casos em que se dá a igualdade. No caso presente, temos igualdade em (9) se e só se  $A$  e  $B$  são conjuntos convexos que diferem por uma dilatação e uma translação (isto é,  $A$  é convexo e  $B = \lambda \cdot A + x_0$  para alguns  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ).

Para não quebrar a linha de raciocínio, remetemos a prova da desigualdade de Brunn–Minkowski para a Secção 5 e partimos à descoberta de possíveis aplicações. Lembramos, de resto, que Dido ainda não sabe o que fazer com uma pele de boi multidimensional...

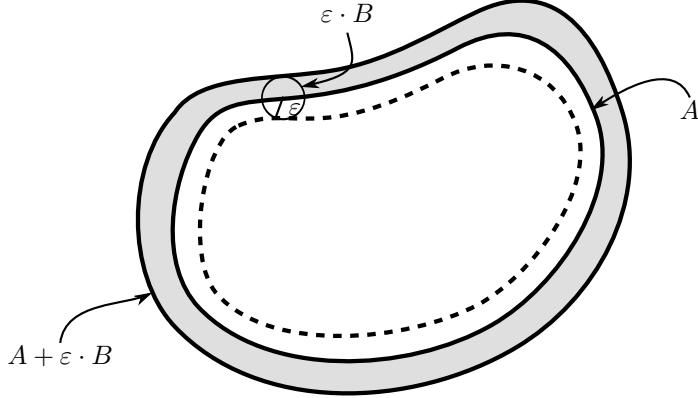


FIGURA 6: A área da região a sombreado é dada por  $m(A + \varepsilon \cdot B) - m(A)$ .

#### 4. A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA: CASO GERAL

Nesta secção propomo-nos provar uma generalização de (1) para dimensões mais elevadas. Fixamos  $d \in \mathbb{N}$ , trabalhamos no espaço euclideano  $d$ -dimensional e assumimos que todos os conjuntos em causa são Lebesgue-mensuráveis. O leitor não familiarizado com os rudimentos da teoria da medida não deve preocupar-se em demasia: tudo o que pretendemos é poder atribuir um “volume”, ou uma *medida*, aos conjuntos em questão. A medida de  $A \subset \mathbb{R}^d$  continuará a ser denotada por  $m(A)$ , e por  $\partial A$  entendemos a fronteira de  $A$ .

**DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA** Seja  $A \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto aberto e limitado, e seja  $B \subset \mathbb{R}^d$  uma bola com o mesmo volume de  $A$ . Então:

$$m(\partial A) \geq m(\partial B).$$

A ferramenta essencial será a desigualdade de Brunn–Minkowski, anteriormente abordada na sua versão bidimensional. A prova que apresentaremos na próxima secção generaliza-se sem dificuldades a dimensões mais elevadas. De facto, dados dois subconjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}^d$  (não vazios, abertos e limitados), temos que

$$(10) \quad m(A + B)^{1/d} \geq m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}.$$

Passemos à prova da desigualdade isoperimétrica. Para simplificar as contas, vamos assumir que  $B$  é uma bola de raio 1 (porque podemos fazê-lo?). Isto é útil na medida em que os volumes da bola unitária  $B^d(0, 1) \subset \mathbb{R}^d$  e respectiva fronteira (a esfera unitária,  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ ) estão relacionados de forma particularmente simples:

$$(11) \quad m(B^d(0, 1)) = \frac{1}{d} m(S^{d-1}).$$

Sob determinadas condições bastante gerais, a seguinte fórmula—ilustrada pela Figura 6—permite-nos calcular a medida da fronteira de um conjunto:

$$(12) \quad m(\partial A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(A + \varepsilon \cdot B) - m(A)}{\varepsilon}.$$

A estratégia não podia ser mais simples: uma vez que procuramos um minorante para  $m(\partial A)$ , vamos aplicar a desigualdade de Brunn–Minkowski (10) ao primeiro termo do numerador em (12),  $m(A + \varepsilon \cdot B)$ . Recordando que  $m(A) = m(B)$  e que

$m(\varepsilon \cdot B) = \varepsilon^d m(B)$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{m(A + \varepsilon \cdot B) - m(A)}{\varepsilon} &\geq \frac{(m(A)^{1/d} + m(\varepsilon \cdot B)^{1/d})^d - m(A)}{\varepsilon} \\ &= \frac{(m(B)^{1/d} + \varepsilon m(B)^{1/d})^d - m(B)}{\varepsilon} = \frac{(1 + \varepsilon)^d - 1}{\varepsilon} m(B). \end{aligned}$$

Reconhecendo o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1 + \varepsilon)^d - 1}{\varepsilon}$$

como a derivada da função  $\varepsilon \mapsto (1 + \varepsilon)^d$  no ponto  $\varepsilon = 0$ , temos então que

$$m(\partial A) \geq d m(B) = m(\partial B),$$

onde a última igualdade é consequência da fórmula (11). Isto conclui a prova supersónica da desigualdade isoperimétrica.

Apesar de elementar, o tratamento do caso bidimensional na Secção 2 requereu uma quantidade considerável de engenho matemático. Poderá parecer estranho que o caso geral decorra tão rápida e facilmente da teoria desenvolvida, mas isso só reflecte o poder analítico da desigualdade de Brunn–Minkowski.

## 5. APÊNDICE: PROVA DA DESIGUALDADE DE BRUNN–MINKOWSKI

A desigualdade de Brunn–Minkowski é consequência do seguinte lema: se  $\theta \in ]0, 1[$  e  $A, B$  forem conjuntos não vazios, abertos e limitados de  $\mathbb{R}^2$ , então

$$(13) \quad m((1 - \theta) \cdot A + \theta \cdot B) \geq m(A)^{1-\theta} m(B)^\theta.$$

Com este lema à nossa disposição, a prova da desigualdade de Brunn–Minkowski é imediata: basta considerar  $m(A)^{-1/2} \cdot A$  e  $m(B)^{-1/2} \cdot B$  em vez de  $A$  e  $B$ , respectivamente, obtendo-se 1 do lado direito da desigualdade (13), e tomar

$$\theta = \frac{m(B)^{1/2}}{m(A)^{1/2} + m(B)^{1/2}}.$$

O leitor é convidado a fazer as contas (fáceis!).

Resta-nos demonstrar o lema, que, por seu turno, é corolário imediato da desigualdade de Prékopa–Leindler, cujo conteúdo é o seguinte:

Seja  $\theta \in ]0, 1[$  e sejam  $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty[$  funções não negativas e integráveis em  $\mathbb{R}^2$  tais que

$$(14) \quad h((1 - \theta)x + \theta y) \geq f(x)^{1-\theta} g(y)^\theta,$$

para todos os  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Então tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h \geq \left( \int_{\mathbb{R}^2} f \right)^{1-\theta} \left( \int_{\mathbb{R}^2} g \right)^\theta.$$

Para provar o lema (que implica, como já vimos, a desigualdade de Brunn–Minkowski), basta tomar  $f = 1_A$ ,  $g = 1_B$  e  $h = 1_{(1-\theta) \cdot A + \theta \cdot B}$ , e aplicar a desigualdade de Prékopa–Leindler.

Limitar-nos-emos a apresentar a prova da versão unidimensional da desigualdade de Prékopa–Leindler. O caso bidimensional de que precisamos segue por um argumento indutivo apresentado em [8]. As ferramentas necessárias resumem-se ao teorema fundamental do cálculo e a um caso particularíssimo da famosa desigualdade entre as médias aritmética e geométrica que recordamos aqui: para todo o  $\theta \in ]0, 1[$  e  $a, b \geq 0$ , temos

$$(MAMG) \quad (1 - \theta)a + \theta b \geq a^{1-\theta} b^\theta.$$

Comecemos por assumir que

$$F = \int f > 0 \quad \text{e} \quad G = \int g > 0.$$

Definimos funções  $u, v : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , requerendo que  $u(t)$  e  $v(t)$  sejam os menores números reais que satisfazem as igualdades

$$\frac{1}{F} \int_{-\infty}^{u(t)} f = \frac{1}{G} \int_{-\infty}^{v(t)} g = t.$$

As funções  $u$  e  $v$  são não decrescentes, e como tal são diferenciáveis em quase toda a parte. Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que

$$(15) \quad \frac{1}{F} f(u(t)) u'(t) = \frac{1}{G} g(v(t)) v'(t) = 1.$$

Defina-se a função

$$w(t) = (1 - \theta)u(t) + \theta v(t).$$

Usando a mudança de variáveis  $s = w(t)$ , relembrando a hipótese (14) na formulação da desigualdade de Prékopa–Leindler, recorrendo à desigualdade (MAMG), e usando (15), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(s) ds &= \int_0^1 h(w(t)) w'(t) dt \\ &\geq \int_0^1 f(u(t))^{1-\theta} g(v(t))^{\theta} ((1-\theta)u'(t) + \theta v'(t)) dt \\ &\geq \int_0^1 f(u(t))^{1-\theta} g(v(t))^{\theta} u'(t)^{1-\theta} v'(t)^{\theta} dt = F^{1-\theta} G^{\theta}, \end{aligned}$$

que é a conclusão pretendida. Isto conclui a prova da desigualdade de Prékopa–Leindler no caso unidimensional.

## 6. NOTAS PARA “PERITOS”

A desigualdade de Wirtinger não é mais do que um caso particular da bem conhecida desigualdade de Poincaré. Esta, por seu turno, constitui o ponto de partida para o estudo dos espaços de Sobolev, fundamentais na teoria das equações às derivadas parciais.

Se quisermos ser completamente rigorosos, temos de ter cuidado com as diferentes medidas que aparecem na formulação do caso geral da desigualdade isoperimétrica. Se, por um lado, podemos tomar a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$  para falarmos de  $m(A)$ , por outro precisamos de recorrer ao conceito mais subtil de medida de Hausdorff  $(d-1)$ -dimensional para nos referirmos a  $m(\partial A)$ . Para que a fórmula (12) valha, é suficiente assumir que a fronteira  $\partial A$  é suave.

As hipóteses do caso geral da desigualdade isoperimétrica podem ser substancialmente enfraquecidas. De facto, basta que o conjunto  $A$  tenha perímetro finito em alguma região limitada  $U \subset \mathbb{R}^d$ , o que é o mesmo que dizer que a função característica  $1_A$  seja de variação limitada em  $U$ . Nesse caso, temos o seguinte refinamento quantitativo da desigualdade isoperimétrica (cf. [2], p. 190 e seguintes):

$$\frac{m(\partial A)}{m(A)^{\frac{d-1}{d}}} \geq \frac{m(S^{d-1})}{m(B^d(0, 1))^{\frac{d-1}{d}}}.$$

## BIBLIOGRAFIA

Os artigos [4] e [6] são as referências clássicas e mais completas para a desigualdade de Brunn–Minkowski e a desigualdade isoperimétrica, respectivamente.

A exposição que fizemos da desigualdade de Brunn–Minkowski (Secções 3 e 5) e a prova da desigualdade isoperimétrica no caso geral (Secção 4) foram inspiradas em [8]. Os exercícios no final do capítulo 3.4 desse livro são vivamente recomendados, e ilustram outras aplicações da mesma desigualdade no contexto da geometria convexa e em especial da combinatória aditiva, uma área fervilhante de investigação matemática actual. A engenhosa prova da desigualdade isoperimétrica no plano (Secção 2) encontra-se delineada em [5].

Solicita-se ao leitor interessado em estudar análise de Fourier que arranje uma cópia de [7] com a máxima urgência. O leitor matematicamente mais sofisticado que esteja interessado em expandir os seus conhecimentos de teoria da medida, espaços de Sobolev e em estudar versões mais gerais da desigualdade isoperimétrica encontrará em [2] uma referência inestimável.

Por fim, convictos de que [9] é presença rara numa bibliografia matemática, recomendamos vivamente a sua leitura.

## REFERÊNCIAS

- [1] P. ENGRÁCIA, *Interlúdio sobre integrais de linha e de superfície*, neste volume.
- [2] L. C. EVANS e R. F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992
- [3] G. B. FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, 2<sup>a</sup> edição, 1999.
- [4] R. J. GARDNER, *The Brunn–Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 39, no. 3, 2002, pp. 355–405.
- [5] T. W. KÖRNER, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- [6] R. OSSERMAN, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 84, no. 6, 1978, pp. 1182–1238.
- [7] E. M. STEIN e R. SHAKARCHI, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [8] T. TAO e V. H. VU, *Additive Combinatorics*, Cambridge University Press, 2010.
- [9] VIRGÍLIO, *Eneida portugueza, parte I*, trad. de JOÃO FRANCO BARRETO, officina de Antonio Vicente da Silva, Lisboa, 1763.