PONTO FIXO

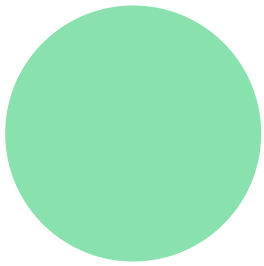
#4.EDIÇÃO 2022

Projetos de Licenciatura
& Teses de Mestrado

Artigos de
professores e alunos

Entrevistas a professores

n{math}



Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Chama-se Ponto Fixo de uma função a todo o $x \in X$ tal que $f(x)=x$

Índice

Parte I

Parte II

Editorial

Já vamos na 4ª edição do Ponto Fixo e, embora esta chegue algo atrasada, o fulcral é que no fim dia temos revista! De facto, não é só em Matemática que continuidade é desejável... Também importa para os projetos do NMATH, já que o núcleo não é mais do que aquilo que produz e apresenta. E, creio falar pela maioria, quando reconheço o excelente trabalho que tem vindo a ser realizado pelo núcleo. Algo extralovável se pensarmos que a equipa do NMATH é renovada todos os anos. Assim, não posso deixar de congratular todos aqueles que fizeram parte do núcleo até hoje e deixo também aqui um elogio precoce (e motivador) àqueles que se seguem.

Gostaria também de observar o seguinte: das últimas três edições desta revista, somente a 1ª edição foi impressa. Claro que tal se deveu a motivos superiores (pandemia...), mas não deixa de ser triste se me perguntarem, pois este é daqueles projetos em que tocar no resultado final faz diferença. E não sou o único a pensar assim! Como tal, peço à próxima equipa do NMATH que não nos prive de tal gratificação e que imprima esta 4ª edição. De momento, já não vale a pena fazê-lo, basta olhar para a data deste editorial. Mas, no início do próximo ano letivo vale! Aliás, é uma ótima maneira de apresentar o núcleo aos novos alunos. Ao NMATH do futuro resta-me somente desejar votos de muito sucesso. Sucesso esse que é alcançado via cooperação e diligência, nada mais!

Por fim, vou deixar um apelo flutuante. É um facto de que o Técnico anda algo mediático ultimamente. Da mesma forma que é um facto de que os alunos andam bastante vocais sobre a nova reforma e as consequências que se verificaram este ano letivo. Então, o meu ponto (fixo) é: não parem! Fundamentem o vosso descontentamento, incentivem aquilo que consideram ser boas práticas de ensino dando motivos, ouçam o meio onde circulam e, principalmente, entreajudem-se. Aguardo ansiosamente por novidades que espero poder ler na revista do próximo ano.

Belo!

Tomás Carrondo
Julho 2022

Albrecht Dürer

O patrono artístico dos matemáticos

Por: **Tomás Carrondo**

Introdução

Antes de mais, tenho que ser totalmente honesto e fazer uma confissão ao leitor... O texto que se segue não vai ser governado pela melhor conduta, na medida em que não assenta numa pesquisa criteriosa e feita com calma, mas antes num estudo frenético de enciclopédias e documentários que analiso enquanto escrevo este mesmo artigo. Porquê? Bom, talvez seja a dose de cafeína que consumi a produzir efeito ou, então, o simples facto de ter uma enormíssima fascinação por Albrecht Dürer e ser mau a conter esse entusiasmo. A verdade é que até há bem pouco tempo encontrava-me perdido na minha própria indecisão, mas depois lembrei-me deste artista! Deste teórico! Deste matemático! Enfim, já explico melhor os ofícios de Dürer. De momento, só quero que fique claro o seguinte: esta individualidade encontra-se ao nível de Leonardo, Michelangelo (seu admirador) e Raffaello, a trindade por excelência do Renascimento. E, embora Dürer seja reconhecido como um grande vulto, eu considero que o devemos tornar ainda mais vultoso! Especialmente nós, "doutores" matemáticos, devemos tê-lo como referência no mundo artístico, já que ele representa a relação simbiótica entre Matemática e Arte.

Pequena nota biográfica

Mas, quem foi então Albrecht Dürer? Ora, como bom homem renascentista, Dürer foi uma catrefada de coisas: pintor, gravador (calcógrafo e xilógrafo), matemático, arquiteto, humanista e teórico de arte (só para numerar algumas). Nascido em Nuremberga a 21 de maio de 1471, começou cedo a vida de aprendiz, estudando os básicos de desenho e calcografia com o pai que era ourives. Para quem desconhece, calcografia é um método de gravura em metal, normalmente sobre uma folha de cobre, em que o artista "calca" a matriz metálica com uma ferramenta aguçada chamada "buril" e que permite "desenhar" no metal. Depois, pincela-se a dita folha de cobre com tinta, retira-se o excedente, coloca-se uma folha "normal" por cima e prensa-se com força. O resultado final é uma impressão que replica os traços escavados com o buril na matriz de cobre. Por usa vez, xilografia também é um método de impressão, mas em madeira, em que o artista desbasta com um buril a parte da imagem que não levará tinta, ou seja, o negativo da figura. Mas, voltemos à História! Dürer começou então a aprender em tenra idade técnicas complexas que requerem imensa minúcia e, aos 15 anos, já era aprendiz do pintor e gravador mais conceituado da Nuremberga até à altura: Michael Wolgemut. Nos anos que se seguiram, Albrecht foi um ávido viajante. Esporadicamente regressando à Alemanha, viajou pela Suíça, Bélgica, Itália e pelos Países Baixos. Sempre a aprender pelo caminho, criando relações com matemáticos (Pacioli), pintores, cônsules (por exemplo, o nosso português João Brandão de Buarcos) e até reis! Destaco, em particular, dois episódios que constam nos seus diários de viagem: um jantar com Erasmus de Roterdão e outro com o rei da Escandinávia. Por fim, tenho que mencionar que Dürer teve como patrono o ilustre Imperador Sacro-Romano Maximiliano I (filho de Leonor de Portugal) que, segundo consta, nem sempre lhe pagava o trabalho comissariado... Durante a sua última estadia nos Países Baixos, Dürer contraiu uma doença (certamente absurda) que passados sete anos lhe tirou a vida. Morreu em Nuremberga, a 6 de abril de 1528, com 57 anos. Ainda que breve, espero que esta nota biográfica tenha dado ao leitor uma noção do prestígio que Dürer detinha já com os seus contemporâneos, um luxo privado a muitos artistas.

A œuvre de Dürer

Focar-me-ei agora na œuvre de Dürer, tanto artística, como teórica. Enquanto pintor, Albretch Dürer não foi menos do que exímio. As suas obras em aguarela apresentam uma precisão enciclopédica e formam autênticos microcosmos. Peço ao leitor que observe as seguintes pinturas: "a Jovem Lebre", "o Grande Pedaço de Grama" e "a Asa do Rolieiro-Europeu" **(A)**. Contudo, foi enquanto gravador que Dürer foi mais prolífico. Aliás, foi Dürer quem elevou a arte da gravura ao nível da pintura e é ele quem representa o fastígio da calcografia. Para quem nunca experimentou qualquer tipo de gravura é difícil entender a absurdidade da técnica de Dürer. Mas, peço ao leitor que acredite quando digo que as mãos de Dürer roçavam o maquinal! É importante notar que quer se trabalhe em madeira ou cobre, no momento da gravação importa considerar não só o movimento do buril nas direções da bússola, mas também a profundidade do corte, de forma a obter traços mais ou menos carregados.

Ao nível da xilografia, talvez a mais conhecida seja "O Rinoceronte" **(B)**. Pois é, foi Dürer que apresentou esta besta aos europeus! Besta essa que, por sua vez, chegava a Lisboa vinda da Índia no dia 1 de Maio de 1515. A obra de Dürer baseou-se não em observação direta, mas sim num esboço de um amigo (também ele gravador), que vivia em Portugal. Sugiro ao leitor que pesquise por conta própria mais xilogravuras de Dürer, pois todas elas são magníficas e intrigantes! Admito que tenho alguma pressa em chegar às impressões em cobre, porque estas... São de bradar aos céus.

A

Começo por nomear duas calcogravuras que fazem parte do trio das "impressões-mestras": "o Cavaleiro, a Morte e o Diabo" e "São Jerónimo no Estúdio" **(C)**. Na primeira impressão, observamos um cavaleiro cristão que segue o seu caminho destemidamente. Ele é a materialização de uma fé inabalável, uma alegoria da virtude moral. Em segundo plano, vemos a Morte também ela montada a cavalo e guarnecida com serpentes. Faço notar a ampulheta que a Morta exibe ao Cavaleiro, "Está quase!" diz ela. E à direita, podemos ver uma representação grotesca do Diabo que parece aguardar ansiosamente pela ação da Morte. Na segunda impressão, por sua vez, temos S. Jerónimo a estudar e também aqui verificamos uma alegoria, desta vez à virtude intelectual. Agora, basta olhar de relance e percebe-se imediatamente que a figura transborda de iconografias e símbolos. Mas nem vou por aí... O que importa fazer notar é a luz! Observe-se como a luz enche o estúdio, como as sombras atribuem seriedade à cena e como as texturas moldam o meio. E claro, ao fundo, temos mais uma ampulheta a trazer a efemeridade ao barulho. Enfim, seria em vão tentar analisar todos os pormenores destas obras, até porque nem é esse o meu objetivo. Dito isto, estou confiante que o leitor que estiver interessado passará momentos de puro deleite ao destilar todos os detalhes. Continuemos...

A

A

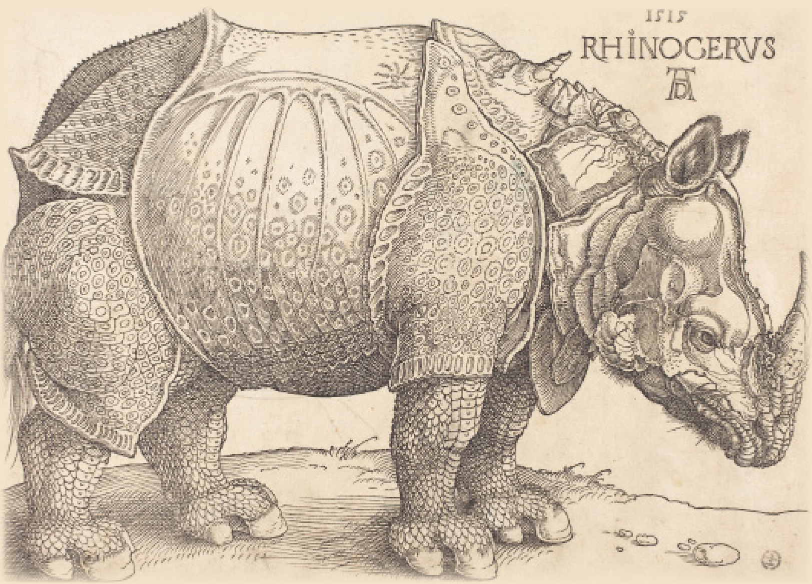
No Renascimento, ressurgiu a ideia de que importa **reproduzir** o objeto natural **como ele é**. Assim, tinha- se que perceber, antes de mais, como eram de facto as coisas naturais e, depois, arranjar maneira de as reproduzir. Ora, no âmbito da primeira questão surgiram as ciências naturais e no âmbito da segunda a Matemática, nomeadamente a Geometria, veio ao auxílio. Deste resgate resultou um dos principais frutos do Renascimento: a perspetiva. E, se houve alguém fulcral no seu estudo e desenvolvimento, foi Dürer. Para ele a nova arte devia basear-se precisamente na Matemática, a mais exata e lógica de todas as ciências. Para além disto, a fonte da beleza da Arte seria descoberta através da Matemática. Claro que, a Matemática como nós a conhecemos hoje não é a mesma de há cinco séculos. Aliás, basta pensar no papel preponderante que a Geometria detinha na altura... Não esqueçamos a Escola Pitagórica! Como tal, não é de estranhar que se atribua a designação de matemático a Dürer. Ao fim e ao cabo, foi ele quem construiu as fundações daquilo a que chamamos de Geometria Descritiva; foi ele quem escreveu o primeiro livro de Matemática publicado em alemão (trabalho nobre o de divulgação!); e foi um estudioso de Euclides que, em certo sentido, continuou o seu trabalho, elaborando diversas construções de polígonos, poliedros e até de secções cónicas. Portanto, entre investigador e divulgador, não restam dúvidas em como Dürer pertence ao mundo da Matemática, da mesma forma que pertence ao mundo da Arte, sendo que os segredos do último seriam desvendados pelo poder do primeiro.

Melancolia I

Agora, sobre a impressão que considero ser um talismã para os matemáticos. Anteriormente, mencionei um trio de impressões-mestras que se calhar passou despercebido, sendo que só nomeei duas das três. Ora, em falta está a calcogravura que, pessoalmente, encaro como um ícone matemático: "a Melancolia I" **(D)**. Aqui sim, vou levar o meu tempo... Peço desculpa pela predileção.

Para começar, importa introduzir brevemente o paradigma medicinal da época de Dürer, também conhecido por teoria humoral e que prevaleceu durante séculos. A ideia por detrás desta teoria é que o corpo é

B



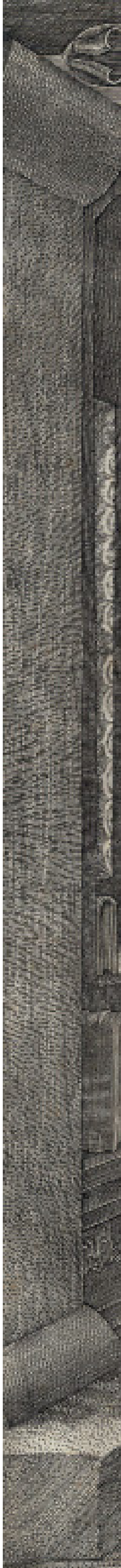
constituído por quatro humores (líquidos segregados): sangue, fleuma, bílis amarela e bílis negra. E, à luz desta doutrina, qualquer doença era causada por um desequilíbrio entre estes líquidos. De especial interesse para nós, é a bílis negra ou, melhor dizendo, a melancolia! De facto, se pesquisarmos a etimologia da palavra "melancolia" verificamos que esta deriva do grego "mélas" que significa "negro" e de "kholis" que significa "bílis". Neste sentido, o estado de angústia mental a que chamamos de Melancolia seria nada mais do que um excesso de bílis negra. Agora, desde a Antiguidade (ou até mesmo antes) que se constata um "culto da Melancolia" e, por culto, entenda-se uma espécie de fascínio ou admiração peculiar. Adicionalmente, este deslumbramento sofreu uns quantos pontos de viragem...

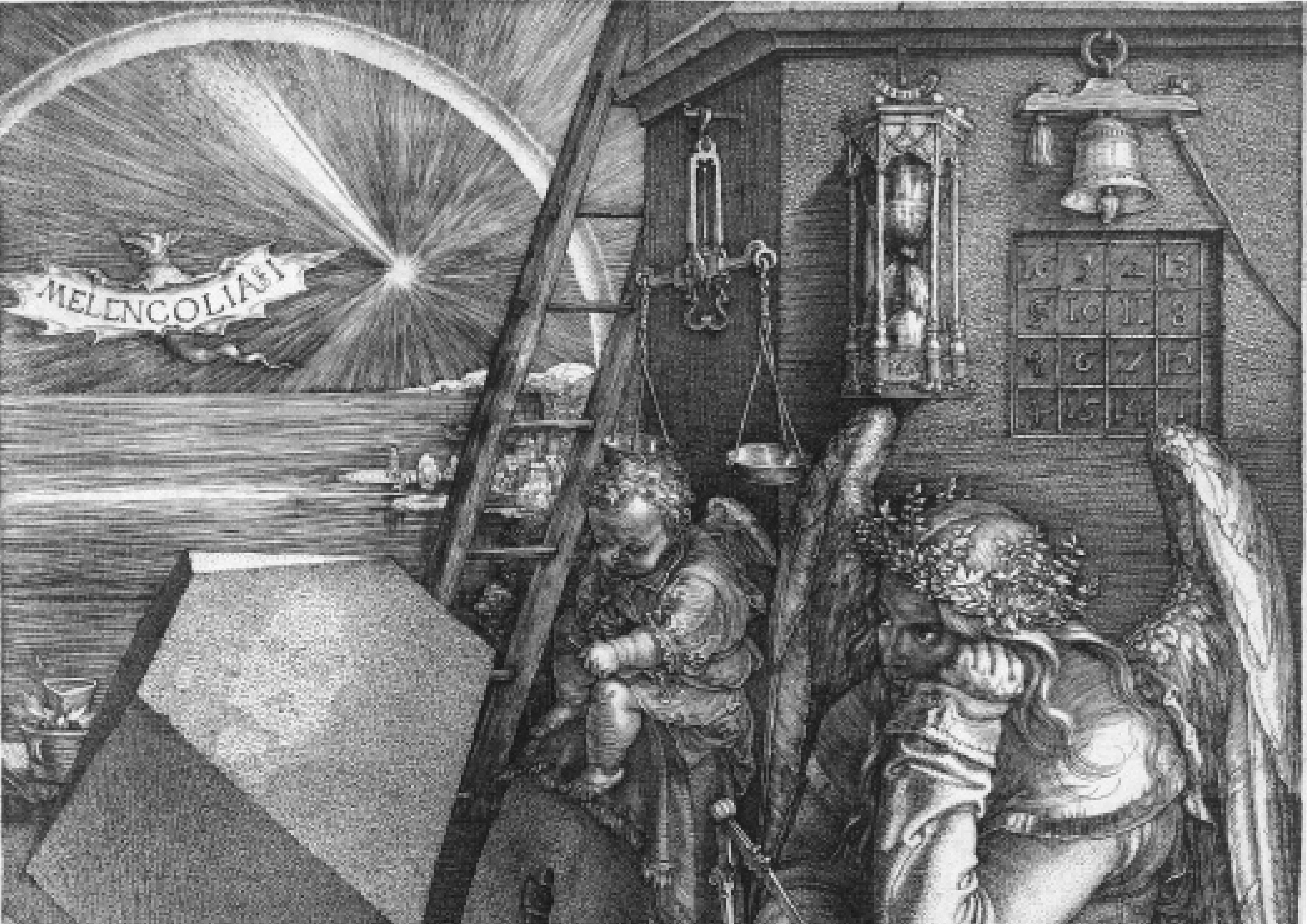
Ç

Antes da Era Comum, a Melancolia parecia deter uma conotação somente negativa, sempre associada a uma prostração excessiva e até à insanidade. Dito isto, a partir do final do século XV, a forma como se romantizava a Melancolia mudou e passou a ter uma conotação ambivalente, pois passara a ser associada também ao génio criativo. E é esta a Melancolia que temos presente na obra de Dürer sob a forma de um anjo, cuja virtude é a criatividade. É uma personificação alada da Melancolia!

Mas, porque não voa? Aliás, o anjo está estranhamente estático... Será isto uma referência à condenação do espírito criativo? Aquele que voa, mas que inevitavelmente estanca... Sempre seria algo familiar aos matemáticos. Pois bem, no mínimo diria que a Melancolia encontra-se frustrada devido a algum tipo de inércia. Inércia essa que, habitualmente, leva a mente a produzir as mais diversas quimeras, algo que o meio circundante à Melancolia parece refletir. De facto, esta calcogravura é particularmente caótica. Temos objetos de medição espalhados pela cena (coincidentemente, outra ampulheta... Memento mori!); o ponto de fuga encontra-se obstruído por um poliedro estranho que parece ter uma caveira numa das suas faces; uma esfera no canto inferior esquerdo atrai o olhar para a confusão que se instalou aos pés do anjo, onde encontramos ferramentas de carpintaria, um cão negligenciado, um turíbulo e um clister (?); num terceiro plano, temos um escadote e é incerto para onde desce ou sobe; em último plano, observamos um arco-íris e um cometa (talvez planeta) que contribui ainda mais para o caos, assim como uma vila portuária; o putto (querubim) também se encontra ensimesmado a tirar notas e parece sofrer igualmente daquilo que o morcego anuncia, isto é "Melencolia I", a melancolia imaginativa. Enfim, são inúmeros os elementos que contribuem para a desordem e ambiguidade desta impressão. No entanto, no canto superior direito, temos algo inesperadamente preceituado: um quadrado mágico! Todas as linhas do quadrado somam 34, assim como todas as colunas e as diagonais; se dividirmos o quadrado em quatro quadrantes voltamos a verificar que cada quadrante soma 34; o quadrado dois por dois central também soma 34; e por aí fora... No total, encontram-se 86 formas de somar 34 neste quadrado mágico. E, note-se também que o ano em que a impressão foi feita, 1514, encontra-se no meio da última linha.

Bom... Na verdade é que todas estas palavras reduzem-se a uma das múltiplas interpretações que existem da "Melancolia I". Há símbolos bastante sugestivos que quase tornam possível haver unanimidade, mas o inexplícito prevalece... Mesmo a grande figura alada, se olharmos com atenção, verificamos ser andrógina e a ambiguidade volta a ganhar. Muitos consideram que a impressão representa uma personificação da própria Geometria e outros encaram a obra como sendo um auto-retrato psicológico de Dürer, em que o querubim desempenha o papel do artista incauto nos primórdios da sua aprendizagem, e o grande ser alífero interpreta o papel do artista experiente e lúcido. Lúcido de quê? Talvez da impossibilidade em materializar tudo o que é platónico. Em todo o caso, o que temos aqui é uma obra-prima digna de toda a contemplação e que sela a Melancolia como experiência comum a todos nós.




MELENCOLIA I
16 3 2 13
5 10 11 8
9 6 7 12
4 15 14 1

Quanto aos matemáticos, creio que muitos se revêem nesta gravura... A eles espero que a "Melancolia I" sirva como algum tipo de consolo e, idealmente, como inspiração.

D

Prof Mário Figueiredo

Entrevista por: **Armando Assembleia, Isabel Nogueira e Sara Gutierrez**

O Professor Mário Figueiredo é um dos fundadores do Mestrado em Engenharia e Ciências de Dados. A sua formação académica foi inteiramente feita no Técnico: licenciatura, mestrado, doutoramento e agregação. E tudo isto na área de Eletrotécnica e Computadores.

Em termos de cargos, começou como monitor e progrediu depois para assistente estagiário, estagiário, assistente, professor auxiliar, professor associado e, finalmente, professor catedrático. Já esteve duas vezes no conselho pedagógico, uma vez por seis anos no conselho científico e, agora, de volta no conselho científico. Foi ainda durante 10 anos coordenador da área científica de telecomunicações do seu departamento, assim como coordenador do doutoramento em Eletrotecnia e Computadores. Mais recentemente, destaca-se por ser um dos fundadores do Mestrado em Engenharia e Ciências de Dados.

Começou por trabalhar em processamento e análise de imagem, tema do seu mestrado e doutoramento, essencialmente com aplicações médicas, mas não só. Depois, mudou um bocado de área, dedicando-se a Machine Learning, "antigamente chamada de Reconhecimento de Padrões", como realça o Professor . E, por volta de 2005/2006, focou a sua investigação em otimização. Atualmente, encontra-se de novo a explorar a área de Machine Learning. Um dos seus temas de interesse, neste momento, passa pela inferência de causalidade.

1) Com a oferta formativa que temos hoje em dia em Portugal, o que alteraria nas escolhas que foi fazendo ao longo da sua carreira académica?

Possivelmente teria ido para Física, porque quando eu entrei não havia esse curso no Técnico. Eu quis vir para o Técnico por várias razões, porque sempre gostei muito de matemática e física, e fazia pequenas montagens como *hobby* quando era miúdo. Na altura, perguntei a várias pessoas qual era o melhor sítio para aprender matemática e física independentemente do curso e aconselharam-me o Técnico. Vim para Electrotecnia porque se juntava tudo. Mas quando estava no terceiro/quarto ano, começou o curso de Física. Ainda considerei mudar de curso, mas isso significava andar dois anos para trás e não tive coragem. Porém tive colegas que mudaram. Mas se tivesse de novo 18 anos, teria ido para Física.

2) O que o levou a escolher a vertente académica?

Eu cito muitas vezes uma frase do Bart Simpson: "Stay in school man, otherwise you'll have to go to work". Digo isto a brincar porque os professores trabalham e não é pouco, mas uma vantagem [da academia] quando comparado com um trabalho mais empresarial é a sensação de liberdade. Se conseguir cavar o meu espaço e a minha autonomia, tenho muita liberdade para decidir o assunto em que quero trabalhar. Há pessoas empreendedoras que têm a capacidade de fazer isto no meio empresarial [...], mas eu sempre prezei muito a liberdade intelectual. Mas também como era aluno, houve professores que mostraram interesse em que eu fosse monitor e, depois, assistente, e, é assim, as coisas acontecem…

3) O que levou à criação do MECD?

Bom, foi em conversas, na altura, com o presidente do Técnico, Arlindo Oliveira, e com o meu colega, André Martins. [...] Nessa altura, andavam a aparecer cursos em Data Science por certas universidades da Europa e dos Estados Unidos e nós pensamos que no Técnico também poderíamos fazer um curso em Data Science, porque temos pessoas para ensinar todos os tópicos na informática, matemática e eletrotecnia. [O curso] foi criado desde o princípio com o objetivo de juntar cadeiras que já existiam e não criar cadeiras novas. Só há uma cadeira que foi criada nova que é a cadeira de projeto. Também houve desde o princípio um objetivo mais latente que era ajudar a baixar barreiras no Ténico entre departamentos, uma vez que o Técnico é muito segmentado, e entre o Técnico e o exterior. [...] O panorama nacional também mudou muito nestes últimos anos. Há 10 ou 15 anos não havia coisas interessantes fora da academia, mas hoje em dia já há muitas coisas interessantes. Há muitas empresas a fazer coisas de ponta e até mesmo a publicar nas melhores conferências. Portanto, foi relativamente fácil [baixar esta barreira entre o Técnico e o exterior], mas fizemos um grande esforço neste sentido.

4) Numa vertente mais empresarial, quais considera serem as maiores lacunas no mercado e como considera que o MECD vem preencher essas lacunas?

Bem, pelo menos vem meter mais trinta pessoas por ano no mercado [risos]. Lacuna no mercado há, porque há falta. Há muita procura por pessoas com o título de Data Scientist. [...] Eu conheço alunos de mestrado que eram engenheiros eletrotécnicos ou informáticos e estavam a responder e tomar posições em empresas com o título Data Scientist. Por isso, já que são Data Scientists vamos arranjar um [curso] mesmo com o título Data Scientist. Os alunos saem do Técnico com o Mestrado em Engenharia e Ciência de Dados. Pusemos a palavra “Engenharia” por causa de ser do Técnico e porque também o curso tem aspetos de engenharia. Nós desenhamos também o curso para as pessoas poderem escolher para si próprias uma formação com diferentes perfis. O Data Science é muito vasto.

5) É essa a razão para a existência de tantas cadeiras livres no MECD?

[O mestrado] tem um núcleo de seis cadeiras, três grupos de duas cadeiras, cada grupo referente a um departamento. E as pessoas têm de fazer pelo menos uma de cada um destes grupos. [...] No grupo de Eletrotecnia há as cadeiras de Machine Learning e Otimização de Algoritmos. Os alunos só têm de fazer uma delas, mas muitos acabam por fazer as duas, a segunda sendo feita como opcional. No grupo de Informática há a cadeira de Base de Dados e a cadeira de Visualização. [Esta última] é muito importante para as empresas. As empresas andam sempre à procura de pessoas muito boas em visualização, porque têm datasets complexos e querem ver o que está a acontecer, querem gráficos e representações que os humanos consigam perceber. Do lado da Matemática têm a cadeira de Análise Multivariada e de Estatística Computacional que é o lado da estatística mais clássica.

O que acontece é que os alunos acabaram por escolher cadeiras onde têm mais lacunas. Por exemplo, os alunos que vêm de matemática, escolhem muito a cadeira de Base de Dados, porque não têm essa formação.

A partir daí, há uma lista muito grande de cadeiras que as pessoas podem escolher. Se uma pessoa estiver mais interessada em “bio-coisas” pode ir fazer uma cadeira de Bioinformática, Biologia Computacional ou Imagem Médica e formar-se mais para esse lado. Se uma pessoa está interessada mais na área de economia, pode escolher as cadeiras do Departamento de Gestão.

> “(...) uma vantagem [da academia] quando comparado com um trabalho mais empresarial é a sensação de liberdade. Se conseguir cavar o meu espaço e a minha autonomia, tenho muita liberdade para decidir o assunto em que quero trabalhar.”

Hoje em dia em Data Science usa-se quase tudo. [Desta forma,] se uma pessoa quiser ficar com uma formação num espetro mais largo, então escolhe cadeiras em várias áreas diferentes.

Na altura, nós tivemos alguma dificuldade na validação do curso, por [este] ser tão flexível. Mas nós argumentamos que o curso não era assim tão flexível e que havia outros cursos em universidades como a ETH que eram ainda mais flexíveis que o nosso.

Outra coisa que também era importante ter é que os alunos podem ser ajudados na escolha [de cadeiras]. Os coordenadores ajudam na escolha e apresentam alternativas. Há uma ajuda de fazer um percurso com alguma coerência.

6) Qual o contributo de cada departamento para o MECD?

O departamento de Matemática tem as coisas mais fundamentais, a Estatística, a Estatística Computacional e depois, para quem está mais interessado nas coisas relacionadas com a Economia tem as cadeiras muito interessantes de Matemática Financeira e Processos Estocásticos para quem tem aquele pensamento mais técnico no sentido matemático.

O departamento de Informática tem infraestrutura na parte de Bases de Dados, Inteligência Artificial, Visualização e há uma cadeira muito interessante de Redes Complexas que é um tema muito interessante hoje em dia, lecionada pelo Professor Francisco Santos.

O departamento de Eletrotécnica tem a cadeira de Machine Learning, que é um dos núcleos de Data Science e tem uma cadeira de Otimização e Algoritmos pois machine learning usa muito otimização e hoje em dia há uma ênfase muito grande em otimização distribuída e como é que consigo correr [machine learning] em vários sítios diferentes. Penso que nos outros cursos não haja uma cadeira de otimização [...], e isso seria bastante útil em cursos como Matemática, por exemplo. Depois nas cadeiras opcionais há coisas como processamento de imagem, processamento de sinais que são importantes em Data Science [...], no entanto, a parte de informática vai mais para as implementações eficientes, linguagens de programação, arquiteturas e a parte de matemática vai para as coisas um pouco mais teóricas e portanto os alunos podem escolher qualquer um destes perfis distintos que têm uma base central comum.

7) O que é que acha que os engenheiros de dados deviam aprender com os matemáticos? E vice-versa?

Não posso falar por todos os engenheiros porque não conheço, só tenho contacto com eletrotécnicos e informáticos e acho que deviam aprender mais matemática! Há uns anos havia um colega meu americano que dizia "O meu maior arrependimento é em todas as fases da minha carreira não ter aprendido sempre um bocado mais de matemática.", porque quando se coloca um problema há aquela frase conhecida que é "A problem well-stated is half-solved" que é se conseguir formular o problema corretamente já está metade do caminho feito e os matemáticos têm muito essa formação. Quase só a matemática é que conhece muito bem esta ideia que é colocarmos o problema da maneira correta, simplificá-lo ao máximo sem perder a essência do que é o problema, e, depois, a partir daí, tentar analisar e amplificar aquilo que se demonstrou. Isto é válido não só do ponto de vista teórico [...], mas também em coisas mais experimentais. Essa estrutura fundamental que os matemáticos têm da importância da formulação e saber olhar para a "coisa" de maneira certa é muito importante e aprende-se [na matemática]. Outro assunto que acho importante ter em engenharia informática e engenharia eletrotécnica (não estou a falar das outras engenharias) é a Matemática Discreta, há cadeiras disso mas não há nenhuma que seja precisamente matemática discreta ou álgebra abstrata, teoria de grupos, lógica, são coisas extremamente importantes em montes de áreas e não só isso, moldam o pensamento de uma pessoa, pois têm uma linguagem extremamente poderosa para falar de muitas coisas.

Agora, o que os matemáticos poderiam aprender com os engenheiros é que eles [engenheiros] aprendem a resolver os problemas sem serem exatamente precisos: é o "for all practical purposes" isto já funciona. Isto na matemática não existe, claro que eles [matemáticos] sabem também fazer isso mas não é essa a formação que têm, são sempre treinados na precisão e na verdade absoluta dos teoremas; os engenheiros estão mais focados na parte experimental, desde que funcione muito bem, é o suficiente. Não estou a dizer que isto falta aos matemáticos, no entanto, como a sua formação é diferente [...] acabam por ter "formatações" de pensamento bastante distintas.

> "Quase só a matemática é que conhece muito bem esta ideia que é colocarmos o problema da maneira correta, simplificá-lo ao máximo sem perder a essência do que é o problema, e, depois, a partir daí, tentar analisar e amplificar aquilo que se demonstrou."

8) Se tivesse de dar um conselho a alguém que estivesse indeciso entre ir para MMAC e MECD, o que diria?

Eu diria que depende, se é uma pessoa mais interessada mesmo nos conceitos e na parte mais matemática das coisas talvez continue muito bem na matemática, mas se for uma pessoa que acha que já sabe um bocado daquilo, mas quer saber um bocadinho mais, mas que também está interessado em saber como é que depois corro um algoritmo se tivermos dois milhões de data points, como é que crio uma base de dados para gerir isto e como é que programo isto de forma eficiente, essa pessoa vai bem para Data Science.

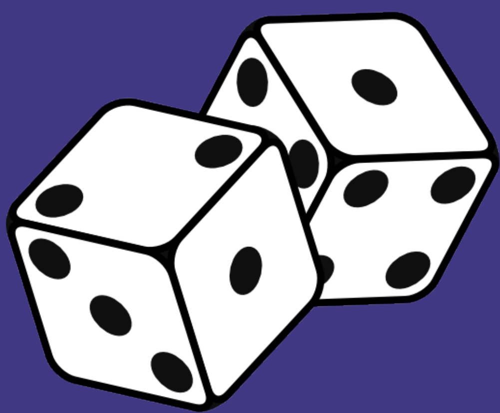
[Data Science] é basicamente estatística com uma preocupação computacional prática, no sentido mais aplicado. Obviamente que se a pessoa tiver interesse em bases de dados e coisas de visualização, tem mesmo de ir para Data Science, mas Machine Learning e esse tipo de coisas estão mais desse lado ou de eletrotecnia. Não vejo um desvio muito grande, de qualquer dois lados a pessoa pode fazer uma formação bastante interessante e depois trabalhar em coisas diferentes.

9) Quais os maiores desafios na área de Data Science nos dias de hoje?

Bem, os maiores desafios hoje em dia não diria que são técnicos [...] não falaria desses, porque Data Science está a crescer de uma maneira tão rápida e há tantas coisas a acontecer, os avanços são muito rápidos do lado técnico. Acho que os maiores desafios são "meta Data Science" que são coisas que podem também ser estudadas por ferramentas técnicas, problemas de justiça e cuidado nas decisões, cuidado nas interações muito complicadas em sistemas que utilizem data science, que têm um impacto enorme nas redes sociais, por exemplo; têm loops de feedback brutais na sociedade e é preciso perceber isso muito bem, pois há aspectos políticos e técnicos.

A evolução está a ocorrer muito depressa e o impacto é muito grande e as constantes de tempo envolvidas são relativamente pequenas e a sociedade do ponto de vista político e sociológico move-se de uma forma mais lenta, os humanos são os mesmos que há 300 anos [...] e as pessoas não percebem o quão rápido as coisas estão a mudar. Questões de privacidade e tudo isso são coisas que devem estar em cima da mesa.

E outro ponto fulcral é que estas coisas não podem nem são tratadas da mesma maneira no mundo todo: as democracias têm uma maneira de olhar para estas coisas muito diferente das autocracias, por exemplo a China, e isso traz algumas vantagens, em termos técnicos, porque têm quantidades de dados gigantes e têm critérios de equidade e de confidencialidade e privacidade menos exigentes e, portanto, conseguem avançar muito depressa; as democracias são um bocado vítimas do que é bom nelas, que é uma coisa muito complicada.



temas para tese de mestrado

"- (...) such a subject that however much you study it, it's always perfectly new.

- Well, then, it would be better not to study it.

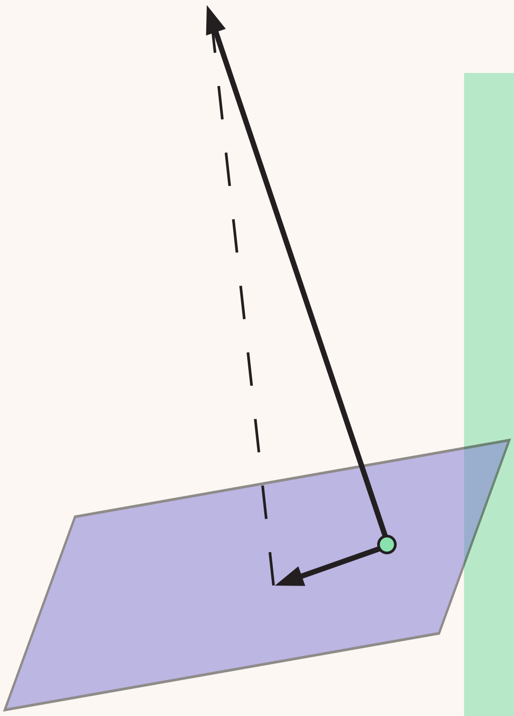
- No. Some mathematician has said that enjoyment lies in the search for truth, not in the finding it."

- Anna Karénina, de Lev Tolstoi

Profª Lina Oliveira

Operadores em espaços de Hilbert. Os dois temas apresentados abaixo, que muito embora aqui globalmente apresentados sob o título genérico 'Operadores em espaços de Hilbert', são, apesar disso, distintos podendo ser descritos em traços largos como focando (i) projeções em fatores de Cartan e (ii) álgebras de operadores associadas a estes fatores. Em comum têm o facto de os objetos em análise serem espaços de operadores lineares contínuos em espaços de Hilbert.

Os fatores de Cartan de tipos I, II, III e IV, também conhecidos como os fatores de Cartan clássicos, são, respetivamente, o espaço $B(H, K)$ dos operadores lineares contínuos entre espaços de Hilbert complexos H e K, abreviando-se para $B(H)$ quando $H = K$, o espaço $A(H)$ dos operadores anti-simétricos, o espaço $S(H)$ dos operadores simétricos, estando estas anti-simetria e simetria definidas em relação a uma conjugação em H, e os *spin factors*. Note-se que $A(H)$ e $S(H)$ são subespaços de $B(H)$, e que um subespaço V de $B(H)$ se diz um *spin factor* se, para $x \in V$, se tiver $x^* \in V$ e $x^2 \in \mathbb{C}I_H$, onde x^* é o operador adjunto de x e I é a identidade em H.



Uma parte central da teoria dos fatores de Cartan tem como base os chamados operadores de multiplicação $a \square b$. Mais precisamente, sendo V um fator de Cartan de um dos tipos mencionados acima e $a, b \in V$, o operador de multiplicação $a \square b$ define-se, para $x \in V$, como

$$a \square b\,(x) = \frac{1}{2}(ab^*x + xb^*a)$$

(i) Projeções hermitianas. Uma projeção $P : V \to V$ é uma aplicação linear contínua tal que $P^2 = P$. É conhecido que as projeções hermitianas podem ser completamente caracterizadas através de uma identidade algébrica. Este facto permitiu estabelecer expressões explícitas para as projeções hermitianas que se podem realizar como somas finitas de operadores de multiplicação, nos factores I, II e III. Pretende-se neste trabalho apresentar esta teoria e analisar exemplos concretos.

(ii) Representações matriciais. Mostrou-se, recentemente, que os fatores de Cartan clássicos determinam subálgebras de Lie do espaço $M_2(B(H))$ das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas em $B(H)$. Mais uma vez, também aqui estas álgebras são determinadas de forma explícita e construtiva. Pretende-se neste trabalho apresentar esta teoria e explorar propriedades destas álgebras.

Os dois livros abaixo são duas referências possíveis para operadores em espaços de Hilbert ([2]) e fatores de Cartan ([1]).

Referências

[1] C-H. Chu, Jordan structures in geometry and analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
[2] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 1989.

Simão

prof Correia

$t \to \infty$

Motivado por inúmeros problemas da Física, desde a mecânica de fluidos à ótica não-linear, o estudo matemático de equações dispersivas é um tópico de investigação ativa intensa nos últimos 70 anos. As equações dispersivas são uma subclasse das equações com derivadas parciais de evolução, ou seja, onde a variável temporal tem maior relevância.

$i\partial_t u + \Delta u \pm |u|^2 u = 0$ - Schrödinger Não-Linear

$\partial^2_{tt} + \partial_x (c(u)\partial_x u) = 0$ - Ondas Não-linear

$\partial_t u + \partial^3_x u = \partial_x (u^2)$ - Korteweg-de Vries

$\partial_t X = (\partial_s X) \times (\partial_{ss} X)$ - Fluxo Binormal

Concretamente, a propriedade que define uma equação dispersiva é que (ao nível linear) ondas/sinais com frequências diferentes movem-se no espaço com velocidades diferentes. Como consequência, as soluções tendem a espalhar-se pelo espaço, dispersando-se. Por outro lado, os termos não-lineares podem dar origem a ressonâncias, que criam picos de amplitude e/ou quebras pontuais de regularidade. Estas duas facetas estão numa luta constante e é necessário compreender a fundo qual é o efeito dominante.

Para nos ajudar, entram em jogo ferramentas de Análise Funcional, Teoria da Medida, Cálculo de Variações, Sistemas Hamiltonianos e Análise Harmónica. Esta última tem uma profunda ligação com equações dispersivas, já que o seu objeto de estudo, a transformada de Fourier, não é mais do que a decomposição de funções em ondas de diferentes frequências. Desta ligação surgem técnicas avançadas como espaços de Bourgain, estimativas de Strichartz, métodos de fase estacionária e decomposições baixa/alta frequência, que formam a base de ataque aos seguintes problemas...

Questões	Palavras-chave
Conhecendo a função no instante inicial, será possível construir uma solução da equação? Será única? Qual é a regularidade mínima sobre a função inicial? A solução depende continuamente dos parâmetros?	Boa-colocação
Será que podem aparecer ressonâncias para tempos grandes? Que fatores intervêm? Como é que a solução se comporta nesse instante? Será um fenómeno estável?	*Blow-up*
Será que a solução está definida para todo o tempo? Qual é o seu comportamento quando $t \to +\infty$? Conhecendo o comportamento assintótico, podemos determinar a solução?	Existência global, scattering, completude assimptótica
Será que a solução fica mais regular à medida que o tempo avança? É possível quantificar precisamente esse ganho de regularidade?	Regularização não-linear
Existem soluções que preservam a forma? Como é que as podemos construir? Serão estáveis? Que influência têm nas restantes soluções?	Solitões, soluções auto-similares
Em que domínios espaciais conseguimos responder às perguntas acima?	Rn, Tn, domínios exteriores, grafos, etc.

Dependendo da equação, do domínio espacial, do termo não-linear e da regularidade da solução, a resposta a estas perguntas pode variar de bem-conhecida a completamente em aberto. Hoje em dia, a comunidade de investigadores em equações dispersivas está em crescimento em todo o mundo.

Junta-te a nós!

prof. PEDRO L

Nos últimos sete anos o meu trabalho de investigação tem-se centrado em torno de dois temas: 1) Equações do campo neuronal e a sua aproximação numérica; 2) Métodos numéricos para equações diferenciais de ordem fracionária. Orientei algumas teses de Mestrado nestas áreas e coordenei um projeto de investigação. Embora não seja fácil explicar cada um destes temas em poucas palavras, vou deixar aqui algumas ideias e pistas para procurarem mais informações, caso estes assuntos vos interessem.

No que diz respeito às Neural Field Equations (como são designadas na literatura em inglês), trata-se de um modelo, introduzido nos anos 70 do século passado, que permite simular a atividade dos neurónios em determinadas zonas do cérebro, em particular, no córtex. Ao fim de 50 anos, continua a ser um tema da atualidade, devido às suas numerosas aplicações, tanto no campo da Medicina, como no da Robótica. Do ponto de vista analítico, são equações integro-diferenciais não-lineares, cujo estudo está repleto de problemas interessantes para os sistemas dinâmicos e a teoria das bifurcações, muitos deles ainda por resolver. Pessoalmente, estou mais ligado aos métodos numéricos para a aproximação das soluções. Estes levantam grandes desafios, pois o esforço computacional exigido pelos métodos clássicos torna indispensável que se recorra a métodos inovadores para elevar a eficiência dos algoritmos. Nos últimos 4 anos, 3 alunos do MMAC realizaram teses nesta área, sob a minha orientação:

Paula Guerreiro

Madalena Martins

Tiago Sequeira

Convido-vos a consultarem estas teses, para terem uma ideia dos problemas desta área. Também poderão ter interesse em consultar o sítio do projeto Neurofield dedicado às aplicações das equações do campo neuronal à Robótica, que coordenei nos últimos três anos.

Neurofield

IMA

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = f(x,t), \quad 1 < \alpha < 2$$

Em relação ao outro tema que referi, as equações diferenciais de ordem fracionária são igualmente uma área em expansão, que nas últimas décadas tem atraído a atenção de muitos investigadores, um pouco por todo o mundo. O cálculo fracionário levanta problemas complexos, tanto para o estudo analítico, como para os métodos computacionais, pois envolve equações integrais com núcleo singular. Por outro lado, os modelos matemáticos envolvendo derivadas de ordem fracionária estão a ter uma aceitação cada vez maior, em diversos ramos da Física, Engenharia e até da Biologia. Juntamente com a Professora Luísa Morgado, da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, orientei a tese da Mariana Mendes nesta área, que também vos convido a consultar:

Para finalizar, quero apenas dizer que terei todo o gosto em responder às vossas perguntas, seja pessoalmente ou por email, e que poderão contar com o meu apoio, caso optem por algum destes temas para a continuação dos vossos estudos.

Prof.ª Cláudia

O meu trabalho de investigação tem-se centrado essencialmente na área da Matemática Financeira, em particular, em problemas de decisão de investimento. No contexto puramente matemático, estes problemas podem ser classificados como problemas de paragem ótima. Em alguns casos, para além da decisão sobre o tempo de paragem, é também necessário decidir sobre outras ações que vão sendo tomadas até esse instante. Nesse caso, estamos perante um problema de controlo. Um dos exemplos mais conhecidos é relativo à decisão sobre exercer uma opção (de compra ou de venda): sabendo que a decisão pode ser tomada até ao tempo T, qual o melhor instante para a exercer, de forma a maximizar o valor esperado do retorno?

Este tipo de problemas encontra-se em várias situações práticas, por exemplo relativas ao Investimento em Energias Renováveis. Numa época em que há incerteza quanto ao futuro dos subsídios para instalação de fontes de produção de energia renovável ou para aquisição de equipamentos que funcionam com energia renovável (carros elétricos, bombas de calor), qual deve ser a melhor estratégia de investimento? Qual o tipo de subsídios que impacta de forma mais eficiente a dinâmica dos investimentos? A ausência de regras completamente definidas sobre os subsídios (até quando estarão disponíveis?) acelera o investimento ou, pelo contrário, atrasa a decisão?

Dependendo das condições do problema, poderá ser possível encontrar uma solução analítica, recorrendo, por exemplo, à derivação da solução de uma equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Trata-se de uma desigualdade variacional, em que um dos membros é uma equação às derivadas parciais. Contudo, problemas mais realistas levam a problemas mais complexos, para os quais já não conseguimos encontrar solução explícita. Nesse caso, é necessário recorrer a métodos numéricos. Nos últimos tempos, tem sido também sugerido o uso de redes neuronais para a sua resolução, em particular em dimensão superior a 3.

Tendo em conta os meus interesses académicos, tenho proposto várias teses nestes temas, muitas vezes em colaboração com os meus co-autores ou alunos de doutoramento. Por exemplo, refiro os títulos de teses passadas:

Green Investment Under Time-Dependent Subsidy Retraction Risk, Investment Decisions Upon Innovative Technological Products, Analysis of the Optimal Exercise Time of an American Call, Option for Jump-Diffusions, Study of the Switching Problem with Abandonment Option: an Application to Petroleum Production.

Nunes

Para além destas propostas, e fruto da parceria do IST com o BNP-Paribas, tenho também orientado alunos em temas relacionados com análise financeira, dos quais destaco os seguintes:

Levenberg-Marquardt Algorithm and Bayesian Inference for SABR Implied Volatility Smile Parameter Estimation, *Volatility Models in Option Pricing* e *Writing a Pricer in a Recombining Tree for CDS Options Using a HJM Model (Cheyette)*.

Em comum, estes trabalhos conjugam a necessidade de entender e dominar a matemática subjacente com alguma perícia numérica e interesse pela aplicação do problema. Esta combinação define os desafios que a matemática aplicada enfrenta, e que não é de todo o parente pobre da matemática pura, mas sim a outra face da matemática moderna.

"(...) e que não é de todo o parente pobre da matemática pura, mas sim a outra face da matemática moderna."

⟨prof a Helena , Mascarenhas⟩

Operadores lineares contínuos em espaço de dimensão finita são habituamente identificados com matrizes $n\times n$. Os operadores podem também ser definidos em espaços de dimensão infinita, como espaços de Banach ou espaços de Hilbert. Ainda assim, se o domínio for um espaço de Hilbert separável, o operador pode ser identificado com uma matriz de dimensão infinita.

Em muitas aplicações, deparamo-nos com uma situação em que conhecemos uma sucessão de operadores (A_n), eventualmente matrizes $n\times n$, que converge para um operador A, eventualmente uma matriz de dimensão infinita. Pretende-se saber qual o comportamento assintótico dos valores próprios de A_n, ou dos valores singulares, do espectro, ou ainda qual o limite de $||A_n||$ ou dos números de condição $||A_n||.||(A_n)^{-1}||$, quando n tende para $+\infty$. E de alguma forma saber se, se no caso de convergência o limite é o correspondente no operador A. Mais geralmente, pretendemos saber se estas propriedades, habitualmente chamadas de propriedades espectrais de A_n, convergem para as análogas do operador limite A.

O espectro de um operador normalmente não é estável para pequenas perturbações. Por essa razão, a noção de pseudoespetro é muito usada, em substituição do espetro, por apresentar estabilidade sob pequenas perturbações.

Uma boa parte do meu trabalho de investigação nos últimos anos tem sido conhecer o comportamento assintótico de propriedades espectrais, tais como valores singulares, pseudoespetro, invertibilidade, propriedade de Fredholm entre outras, considerando essencialmente operadores de Toeplitz e operadores de Convolução. Atualmente, estou interessada em generalizar alguns resultados para matrizes de Toeplitz de coeficientes variáveis.

Os operadores de Toeplitz, associados a matrizes de Toeplitz, matrizes constantes nas diagonais, surgem em contextos muitos distintos como teoria do controlo, fatorização de Wiener-Hopf, polinómios de Fibonacci e mais recentemente no estudo de redes neuronais. As redes neuronais podem ser descritas como uma função obtida pela composição de operadores lineares (matrizes) com uma ou mais funções não lineares (ou lineares por troços). Em certos modelos, as matrizes associadas são matrizes de Toeplitz ou matrizes circulares de grande dimensão.

Um tópico interessante é investigar em que medida os resultados de convergência sobre matrizes de Toeplitz, estabelecidos por Bottcher, Silbermann, Trefethen, Widow entre outros, poderão ser usados para melhorar a *performance* desta redes.

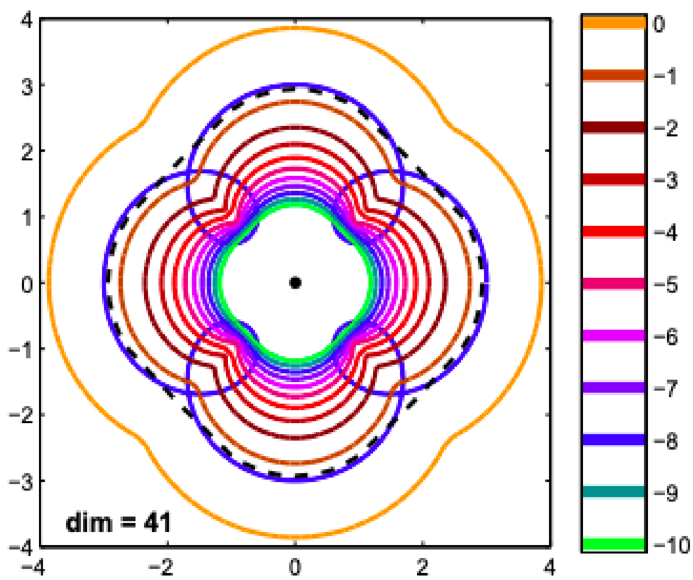
Outro tópico interessante é contribuir para a resolução de um problema em aberto bem conhecido: o problema do subespaço invariante. Este problema, enunciado nos anos 50 , consiste em saber se dado um qualquer operador linear contínuo T definido num espaço de Hilbert separável, ou num espaço de Banach reflexivo, este possui um subespaço invariante não trivial. Exemplo simples de resposta positiva é o caso em que o operador é definido num espaço complexo de dimensão finita maior do que dois: existe sempre um subespaço próprio, não trivial, do operador, e, portanto, invariante por T.

Existem diversas linhas de investigação deste problema, uma delas baseada no estudo dos subespaços invariantes de uma classe de operadores universais, tendo sido objeto de estudo do trabalho de Guilherme Varela, no âmbito do Programa Novos Talentos em Matemática 18/19.

Sobre a investigação, bela e ilustrativa é a frase da Agustina Bessa-Luís no campo da escrita:

"Há pouca gente que perceba que escrever é uma espécie de danação em que às vezes se têm encontros com Deus."

Plot of the pseudospectra of the Toeplitz matriz A20.



$(\Omega, \mathscr{F}, \text{prof}^{\text{a}}$ Patrícia

Nestas linhas, pretendo descrever o tipo de problemas que tenho investigado ao longo dos últimos anos e que estão sob o chapéu da teoria da probabilidade, mais precisamente, da teoria de processos de Markov, mas que também "tocam" na área de equações às derivadas parciais (determinísticas e estocásticas). A teoria da probabilidade tem os seus pés assentes na teoria da medida e, desde o trabalho revolucionário de Kolmogorov, tem vindo a ter cada vez mais destaque quer dentro da área da matemática, quer na quantidade numerável de aplicações a vários problemas da vida real. A teoria da probabilidade é muito rica, toca em várias áreas da matemática e é, a meu ver, uma das mais bonitas teorias da matemática e das mais interdisciplinares. Por motivos históricos, é muitas vezes colada à estatística, mas hoje em dia tem-se desenvolvido de tal forma que poderia dizer que é uma disciplina que tem características muito especiais e que merece, de facto, grande destaque. Por esse motivo, nas próximas linhas vou apresentar um dos meus temas de investigação que acho particularmente interessante, na esperança de despertar curiosidade ao leitor.

Os problemas que investigo estão, como já mencionei acima, dentro da teoria da probabilidade, mais precisamente dentro da teoria de processos de Markov. Nestes processos, a previsão do futuro, condicionado ao conhecimento do passado, apenas depende do estado atual do sistema e esta propriedade é a chamada *perda de memória*. Dentro destes processos estão os chamados sistemas de partículas. Estes sistemas foram introduzidos na comunidade matemática nos anos 70 por um matemático chamado Spitzer (que deu variadíssimas contribuições à probabilidade), contudo, já eram largamente estudados pela comunidade física. Estes sistemas generalizam o conceito do qual já todos ouvimos falar: o passeio aleatório. Ou seja, consideramos que temos um certo conjunto discreto de sítios, no qual colocamos uma partícula, e considerando o tempo discreto, e assumindo que a particula salta de acordo com uma certa probabilidade para um outro sítio arbitrário do conjunto discreto, podemos colocar questões como: qual a probabilidade de observar a partícula numa certa posição num tempo fixado? Ou, qual a probabilidade da partícula regressar um número infinito de vezes ao sítio de onde partiu? Nos sistemas de partículas, em vez de termos apenas uma partícula, como no passeio aleatório, temos agora uma coleção arbitrária de partículas cujo movimento é afetado pela presença de outras. A motivação física para o estudo de sistemas de partículas está relacionada com a descrição macroscópica de sistemas físicos, através da análise microscópica dos seus constituintes. Seguindo a abordagem proposta por Boltzmann, para entender como evolui um sistema físico, devemos primeiro descrever os seus estados de equilíbrio, parametrizá-los pela quantidade que estamos interessados em analisar e, só depois disso, devemos analisar a sua evolução fora do equilíbrio.

Gonçalves)

Tipicamente, nestes problemas, temos um conjunto macroscópico que discretizamos, segundo um parâmetro de escala, no espaço discretizado definimos um sistema de particulas, cuja dinâmica conserva alguma quantidade, e o objetivo consiste em descrever a evolução espaço-tempo dessa quantidade através de uma equação às derivadas parciais. Então, por exemplo, se o conjunto macroscópico for o intervalo $[0,\ 1]$, podemos dividi-lo em intervalos da forma $(i/n,\ (i+1)/n]$ e nos extremos desses intervalos, i.e. nos pontos das forma i/n podemos colocar partículas que se movimentam entre os pontos da forma i/n com uma certa probabilidade. O sistema evolui em tempo contínuo e, portanto, teremos que atribuir um tempo exponencial de cada partícula permanecer em cada posição i/n.

Dependendo da probabilidade de transição, podemos obter diferentes equações às derivadas parciais, como por exemplo a equação do calor $\partial_t u(t,\ x) = \partial^2_x u(t,\ x)$ ou a equação de Burgers sem viscosidade $\partial_t u(t,\ x) + \partial_x u(t,\ x)\ (1 - u(t,\ x)) = 0$. Repare que a aleatoriedade do sistema tem três fontes de proveniência: a configuração inicial do sistema, os relógios que estabelecem o tempo que cada partícula fica numa determinada posição e a probabilidade de transição entre os sítios do sistema discreto. Apesar do sistema microscópico ser aleatório (e, portanto, a sua análise é feita usando ferramentas da teoria da probabilidade e processos estocásticos), fazendo o limite do parâmetro de escala a tender para infinito, pretendemos aproximar o sistema aleatório por uma função determinística que é solução de uma equação às derivadas parciais. Nestes problemas há portanto dois níveis: o nível macroscópico, que consiste num conjunto contínuo onde definimos soluções de equações (que são determinísticas) e o nível microscópico, que consiste num conjunto discreto onde definimos sistemas de partículas que interagem de acordo com uma certa regra (que são aleatórios). Há vários problemas em aberto que podem ser abordados numa tese de mestrado mas, obviamente, há um longo caminho a ser percorrido, desde o estudo de sistemas de partículas, à própria conexão entre o sistema discreto e aleatório com o sistema contínuo e determinístico.

Profa Conceição Amado

A minha área principal de investigação é a Estatística. Não vos poderei falar de temas para projetos sem vos falar um pouco da importância da Estatística. A Estatística é a ciência de aprender com dados e é a ferramenta que usamos para converter dados em informação. Decisões baseadas em dados e informação fornecerão melhores resultados que aquelas apenas baseadas em intuição ou pressentimentos. A aplicação de estatística é necessária praticamente em toda a atividade humana, desempenhando um papel muito significativo em quase todos os campos do conhecimento. Na era da informação, o uso da estatística é um processo crucial dada a crescente importância das decisões e opiniões com base em dados (muitos dados!).

Naturalmente, os temas para projetos de licenciatura e dissertações têm que ser diferenciados. Relativamente a projetos de licenciatura, o meu objetivo é propor aos alunos temas atuais e/ou análise de um problema com dados reais, que envolvam áreas específicas que não foram abordadas ao longo dos três anos da licenciatura. A ideia geral para estes projetos foca-se na iniciação à investigação através da pesquisa e leitura de artigos científicos e aprendizagem de novos modelos. Assim, alguns dos temas de projetos de licenciatura, que os vossos colegas realizam atualmente comigo, referem-se a aprender o que são modelos hurdle, como fazer a interpretação de modelos *black box*, o que é reinforcement learning, ou então criar um modelo que permita prever qual o género musical através de dados de áudio.

De modo geral, todos os projetos têm uma parte computacional, que envolverá o *R* ou *Python*. Relativamente a temas para projetos de dissertação, na maioria dos casos, estão relacionados com projetos de investigação em que participo ou assuntos relacionados com a minha investigação atual. Neste semestre, alguns dos temas de dissertações que oriento estão relacionados com: (i) modificação ou proposta de uma extensão do processo de Yule e comparação com o modelo de tempo de vida acelerado Weibull para previsão de falhas em condutas de água; (ii) modelos Grey para previsão; (iii) programação não linear inteira mista para otimização de redes hidráulicas; e (iv) modelos *hurdle* robustos.

Em geral, os temas que proponho dependem do interesse do aluno por um tema mais aplicado ou mais teórico, e/ou ter uma componente mais ou menos computacional. Em baixo, encontra-se um QR code onde podem ver alguns dos temas de dissertação que orientei.

PROF
Gustavo Granja ≃

≃

As minhas áreas de investigação são a Topologia Algébrica e a Topologia Simplética. A Topologia Algébrica é a área da Matemática que estuda os espaços topológicos ou, mais precisamente, a sua ”forma geral” (o termo técnico é ”tipo de homotopia”), atribuindo-lhes invariantes algébricos. Um exemplo que vos deve ser familiar da cadeira de Topologia é o grupo fundamental de um espaço topológico com ponto de base. A Topologia Simplética, por sua vez, estuda propriedades topológicas das variedades simpléticas - variedades com uma certa estrutura geométrica que tem origem na Mecânica Clássica. Dentro destas grandes áreas, os temas a que me tenho dedicado são, maioritariamente, o estudo da topologia de certos espaços de funções, como espaços de difeomorfismos, ou espaços de estruturas geométricas em variedades, por exemplo, espaços de estruturas complexas e quase-complexas.

Quase nenhum dos projetos de licenciatura e mestrado que ofereço estão diretamente relacionados com os meus temas de investigação. A minha intenção com os projetos de licenciatura é, principalmente, aumentar a cultura matemática da aluna ou aluno em questão, dando uma introdução a tópicos centrais da Matemática que praticamente não são tocados na vossa licenciatura. Exemplos são vários projetos sobre Teoria dos Números (de cariz algébrico ou analítico) e Teoria das Representações (um exemplo é o estudo das representações do grupo simétrico), uma introdução às Curvas Elípticas, ou uma introdução à Geometria Algébrica através das curvas algébricas. Há ainda alguns tópicos de Topologia como a Teoria da Dimensão, ou o estudo de Teorias do Campo Topológicas em dimensão 2. Finalmente, ofereço também um par de projetos que lidam com tópicos de menos interesse geral, mas que incluo porque me parecem muito apelativos. Um deles lida com as aplicações geométricas dos octoniões e outro com a generalização da análise complexa de funções de uma variável a funções de uma variável quaterniónica.

Os projetos de mestrado que ofereço podem dividir-se em dois grandes grupos. O primeiro consiste em temas que constituem uma introdução a áreas de investigação em Topologia muito ativas nas quais eu não sou especialista. O objetivo destes projetos é iniciar a formação de matemáticas e matemáticos que vão prosseguir estudos de doutoramento em Topologia ou áreas relacionadas. Exemplos deste temas são a Teoria das categorias-infinito, o Princípio-h de Gromov, ou a nova teoria da Matemática Condensada de Clausen e Scholze. Dentro deste grupo mas com um nível de exigência inferior há ainda o tópico da análise de dados topológica, que se presta a projetos de cariz mais prático. O segundo grupo consiste em temas mais específicos e mais próximos da minha própria investigação. Exemplos são o estudo de deformações de estruturas complexas compatíveis com uma estrutura simplética, o estudo homológico de ações de grupos finitos, ou a teoria dos Polinómios de Thom (certas classes de cohomologia características associadas a singularidades de funções suaves).

Na página em baixo podem encontrar descrições breves dos vários projetos assim como uma lista dos projetos e teses de mestrado que já orientei.

prof

PEDRO FREITAS

Algumas considerações sobre projetos de Licenciatura e Mestrado:

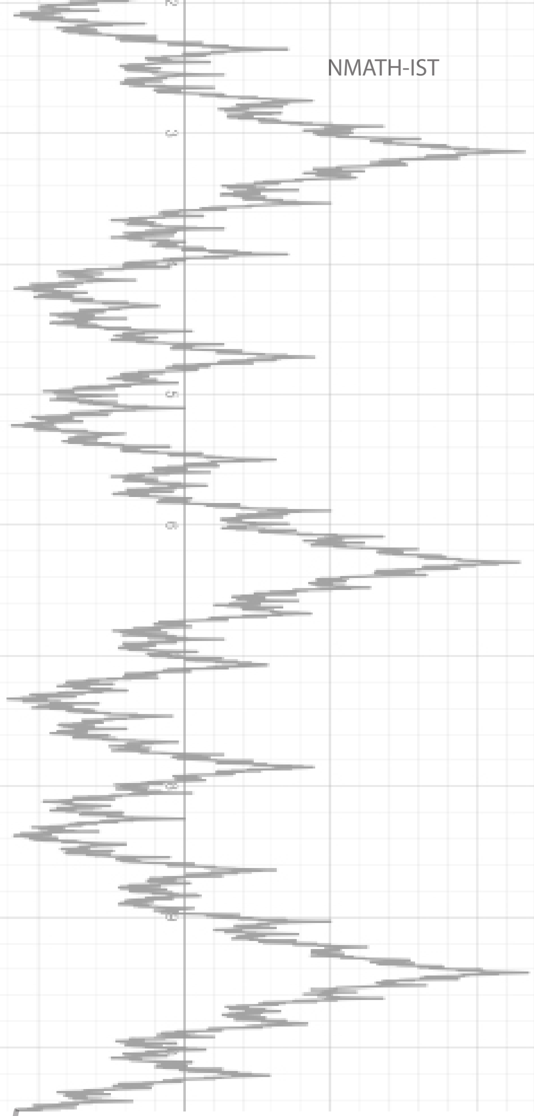
3 princípios básicos e 2 exemplos

O propósito deste curto texto é dar uma visão pessoal dos princípios que devem reger a orientação de projectos de Licenciatura e Mestrado. Outros docentes terão, possivelmente, visões diferentes sobre a forma e o trabalho a realizar nesse âmbito, pelo que penso ser mais relevante proporcionar essa descrição do que fazer uma enumeração de possíveis temas, os quais de qualquer forma irão evoluindo ao longo do tempo, podendo uma lista (não exaustiva) ser encontrada em:

Talvez seja melhor começar por enunciar um princípio básico, mas que poderá não ser totalmente óbvio: a orientação de um projecto de licenciatura ou mestrado não tem de ser, necessariamente, numa das áreas principais de investigação do orientador desse projecto. Claro que essa situação pode ter algumas vantagens, mas por outro lado estamos a um nível em que os alunos devem consolidar os seus conhecimentos e explorar diferentes áreas com a finalidade de obter uma visão o mais panorâmica possível do que é a Matemática.

"(...) a orientação de um projecto de licenciatura ou mestrado não tem de ser, necessariamente, numa das áreas principais de investigação do orientador desse projecto."

Como consequência, poderá ser tão relevante um projecto onde o aluno estuda alguns artigos ou um livro de texto sobre um tópico clássico bem estabelecido, como outro em que explora um avanço recente num problema específico. Em qualquer dos casos, terá de adquirir um domínio dos conceitos e técnicas necessários à compreensão do que está em jogo, estando a diferença, possivelmente, no tipo de flexibilidade que cada um destes projectos permite.



Como exemplo do primeiro tipo de projecto, podemos pensar na classe de funções contínuas num intervalo que não são diferenciáveis em nenhum ponto, cujo primeiro exemplo foi dado por Weierstrass em 1872. Esta função é muitas vezes referida na UC de Cálculo Diferencial e Integral I devido à sua característica pouco intuitiva, sendo essa menção normalmente seguida da frase "o estudo desta função sai do âmbito desta cadeira". Um projecto de licenciatura poderá ser o ambiente apropriado para completar este conhecimento, podendo cobrir a compreensão e estudo do exemplo original e dos seus desenvolvimentos posteriores, até à abordagem computacional sugerida por Bailey et al. em 2007 [B+].

No outro extremo, um projecto pode consistir no estudo das técnicas usadas recentemente em [F] para estudar o determinante do oscilador hamónico quântico em dimensão arbitrária, e eventualmente verificar se é possível estudar o espectro de operadores semelhantes efectuando uma análise do mesmo tipo.

Cabe aqui enunciar um segundo princípio, o qual também penso dever estar subjacente à realização de um projecto de licenciatura ou mestrado: a proposta deve ter alguma flexibilidade, não apenas temática, mas também em termos de originalidade do trabalho a realizar. Mais precisamente, deve permitir ao aluno, por um lado, alguma liberdade de escolha dentro do tópico, após o início do trabalho e uma vez mais familiarizado com os diferentes conceitos. Por outro, deve dar a possibilidade de, após a aquisição dos requisitos fundamentais para a compreensão e domínio de uma matéria, optar por uma direcção de continuação mais exploratória, caso o aluno assim o pretenda.

Finalmente, um terceiro princípio na sequência do que foi enunciado acima: há sempre a possibilidade de um aluno me contactar para discutir se poderá realizar um projecto num dado tópico em que está interessado. Obviamente que haverá aqui várias condições que deverão ser satisfeitas, mas, num certo sentido, esta poderá ser a situação ideal.

Referências

[B+] D. H. Bailey, J. M. Borwein, N. J. Calkin, R. Girgensohn, D. R. Luke, e V. H. Moll, "Experimental Mathematics in Action". A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2007.

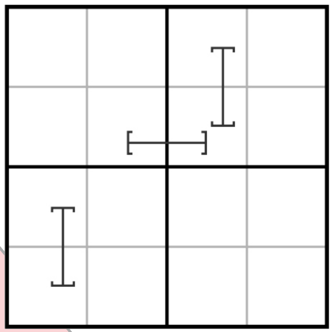
[F] P. Freitas, The spectral determinant of the isotropic quantum harmonic oscillator in arbitrary dimensions, Math. Ann. 372 (2018), 1081-1101.

]INTERVALO[

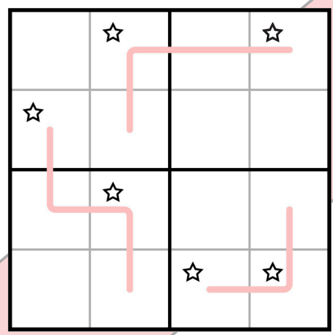
Um diferente tipo de Sudoku...

Neste puzzle, as regras normais de sudoku aplicam-se. Contudo, em vez de termos números no início do jogo, temos "pistas gráficas" que podemos designar por "intervalos" e "cobras". Um **intervalo** (a preto) é uma sequência crescente de **números consecutivos**, lida de cima para baixo ou da esquerda para a direita. **Todos** os intervalos presentes no puzzle são dados (regra 1). Uma cobra (a rosa) de tamanho k é uma função de domínio {1,2,...,k} tal que o n-ésimo dígito a contar da cauda (que é uma das duas pontas, a determinar) é a imagem da função em n. **Todos** os **pontos fixos** (estrelas) da cobra são dados. Não há mais restrições na imagem da função (regra 2).*

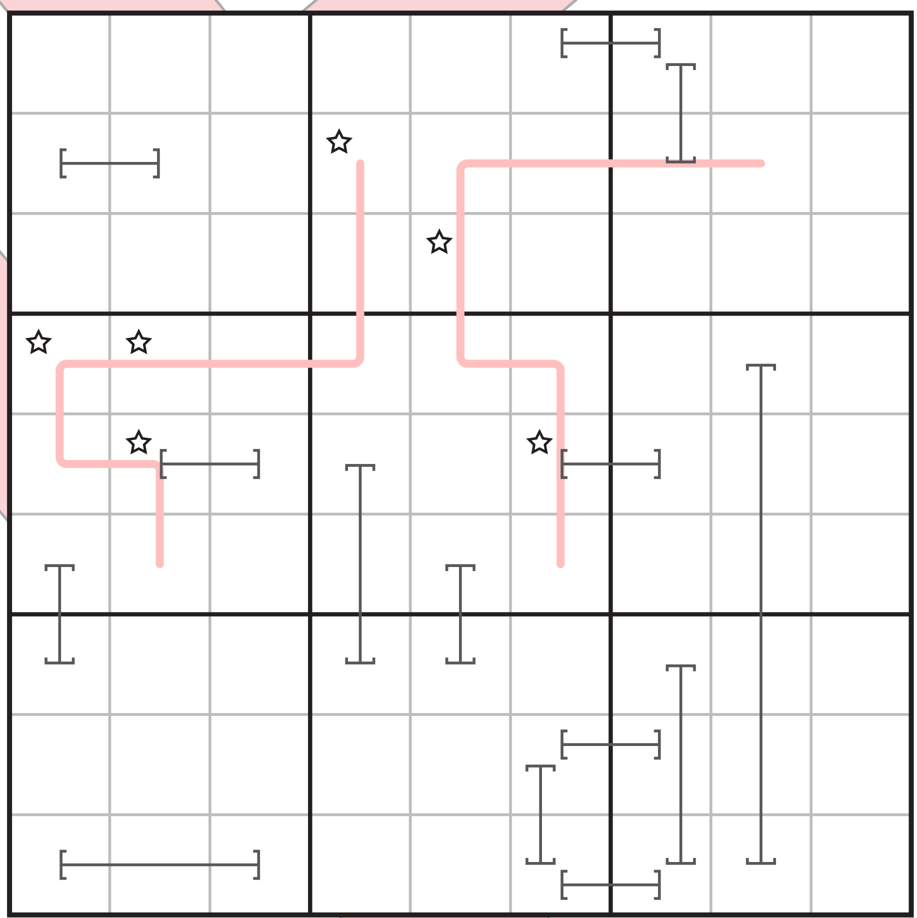
Intervalos



Pontos Fixos



Intervalos e Pontos Fixos



* No 1º puzzle 4x4 somente a regra 1 é aplicável e no 2º puzzle 4x4 somente a regra 2. No 9x9 ambas as regras aplicam-se.

O professor Guilherme Ramos iniciou o seu percurso no Instituto Superior Técnico (IST) em 2008 na Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação e deu continuidade aos seus estudos no IST tendo seguido o Mestrado em Matemática e Aplicações em 2011.

No ano em que concluiu o mestrado começou a sua posição como Professor Monitor no IST onde permaneceu até 2020. Em 2014 deu início ao seu doutoramento em Segurança de Informação no IST, tendo sido acompanhado pelo professor Carlos Caleiro.

Entre os anos de 2018 e 2020 foi também investigador pós-doutoral no Instituto de Sistemas e Robótica (ISR), no IST; após isso, estreou-se profissionalmente na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP) como investigador pós-doutoral.

Atualmente, tem dois cargos na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) como membro integrador do LASIGE (que pertence ao Departamento de Informática) e como professor auxiliar convidado do Departamento de Informática.

Entrevista por: Armando, Isabel e Sara

Guilherme Ramos

1) Com a oferta formativa que temos hoje em dia em Portugal, voltaria a escolher LMAC como seu primeiro curso a nível superior? Se não, o que escolheria?

Voltaria a escolher LMAC como o meu primeiro curso. Na minha opinião, a LMAC desenvolve alunos com uma excelente capacidade de raciocínio e autonomia de pensamento. Estas capacidades, aliadas a um bom background, tornam relativamente fácil compreender e comunicar com pessoas formadas nas diversas áreas da engenharia.

2) Quais as maiores dificuldades que sentiu na LMAC e MMA?

Julgo que a maior dificuldade tenha sido o processo de adaptação e as dores de crescimento, em especial no primeiro semestre do primeiro ano. Mas, hoje em dia, percebo que é um processo que faz parte sempre que realizamos uma mudança, de modo geral, na vida. Relativamente ao mestrado, a máquina já estava oleada e não houve nenhum sobressalto nesta etapa.

3) Na sua opinião, o que poderia ser reformulado em LMAC/MMA?

A meu ver, deveria existir mais uma disciplina de programação/computação obrigatória na licenciatura para os alunos explorarem mais um pouco esta área que, numa grande parte dos casos, fará parte dos seus futuros trabalhos, quer sejam na indústria ou na academia.

4) O que o levou a escolher a vertente académica?

Ao longo do meu percurso académico tive a oportunidade de começar a trabalhar em investigação (com bolsas de investigação) ainda durante o mestrado. Penso que tenha sido aí que emergiu a paixão pela área de investigação. Por outro lado, desde pequeno que me imaginava a dar aulas, oportunidade que surgiu assim que iniciei o doutoramento. É uma gratidão ensinar o que sei aos alunos e aprender constantemente mais com eles.

5) Como membro fundador do NMATH, quais foram as razões que levaram à criação deste núcleo?

Apesar de ser membro fundador do NMATH, não estive muito envolvido na sua criação. De todo o modo, julgo que havia uma necessidade de organizar os alunos, quer para atividades, quer para a partilha de material de disciplinas, à semelhança do já na altura existente núcleo de biomédica.

6) Qual a sua opinião e experiência pessoal sobre diferentes ambientes académicos (IST, FEUP e FCUL)?

O IST será sempre a “minha casa”, pois foi lá que “cresci” muito e dediquei muitos anos da minha vida, sempre num ambiente próximo e especial. Em particular, foi um gosto muito grande todos os anos que trabalhei com pessoas da secção de Lógica e Computação e com quem vou mantendo contacto. Relativamente à FEUP, o meu contacto presencial foi parco, pois entrei na altura do início da pandemia e fiz todo o meu percurso lá de forma remota. Por fim, quanto à FCUL que é onde me encontro neste momento mas não há muito tempo, diria que tem um bom ambiente académico e um bom grupo de investigação (o LASIGE). Os colaboradores têm sido muito agradáveis e amigáveis comigo, apesar desta caminhada ainda ser curta na minha vida.

Equações Diferenciais Parciais Não Lineares

Algumas noções e temas

Por: **Hugo Tavares**

A modelação matemática é uma das maneiras mais eficientes e poderosas de compreender fenómenos da natureza e de prever desenvolvimentos futuros. Muitos desses modelos são formulados com o auxílio de Equações Diferenciais Parciais (EPDs), ferramentas matemáticas que captam a variação em relação a variáveis contínuas (por exemplo tempo, espaço ou preço) de determinados fenómenos sujeitos a algumas leis como difusão, reação, competição/cooperação, etc. Assim, as EDPs podem modelar uma enorme variedade de situações com aplicações à Biologia (dinâmica populacional, por exemplo), à Física (ondas, mecânica quântica, teoria da relatividade, elasticidade, . . .), Engenharia e Finanças. Além disso, surgem naturalmente ligadas a áreas teóricas como Geometria, Cálculo de Variações, Análise Funcional ou Análise Estocástica.

Durante a licenciatura trabalhamos com algumas equações mais simples: as equações do calor e das ondas com uma variável de espaço, respetivamente,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0;$$

e a equação de Laplace a duas dimensões (relembrem Análise Complexa)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Quem teve Matemática Financeira poderá ter ouvido falar na equação de Black-Scholes.

Mais tarde, durante o mestrado, analisam-se as versões mais gerais destas equações em dimensão arbitrária:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - c\Delta u(x,t) = f, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\Delta u(x) = f \quad e \quad -\Delta u = f$$

onde $t \in \mathbb{R}$ representa o tempo, $x \in \mathbb{R}^N$, f é uma função dada e $\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano nas variáveis de espaço. A última equação das três é a equação de Poisson e diz-se estacionária, já que não depende da variável tempo. Todos estas equações são lineares (combinações lineares de soluções são soluções de uma equação do mesmo tipo). A investigação matemática mais recente concentra-se em modelos não lineares e é aí que se encontra a minha área de especialização (estando sobretudo focado em modelos estacionários). Para equações não lineares não há em geral fórmulas de representação de soluções, sendo o seu estudo muito mais complicado.

A nível de licenciatura, um tema razoavelmente simples e interessante de iniciação a modelos não lineares é o estudo de leis de conservação escalares. A uma dimensão de espaço, estas são equações do tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}(q(u(x,t))) = 0, \text{ onde } u = u(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

e $q(u)$ é uma função fluxo. Este tipo de equações surge em vários contextos, desde dinâmica de fluidos e gases ao estudo de tráfego automóvel. Neste último caso, a equação ajuda a dar uma explicação para os "engarrafamentos fantasma" e para os vários efeitos de onda que encontramos no trânsito do dia-a-dia. É também uma equação que permite modelar choques, o que leva à necessidade de falar em soluções não diferenciáveis em equações...diferenciais! Um excelente ponto de partida é o livro [Roger Knobel, An Introduction to the Mathematical Theory of Waves, AMS 2000].

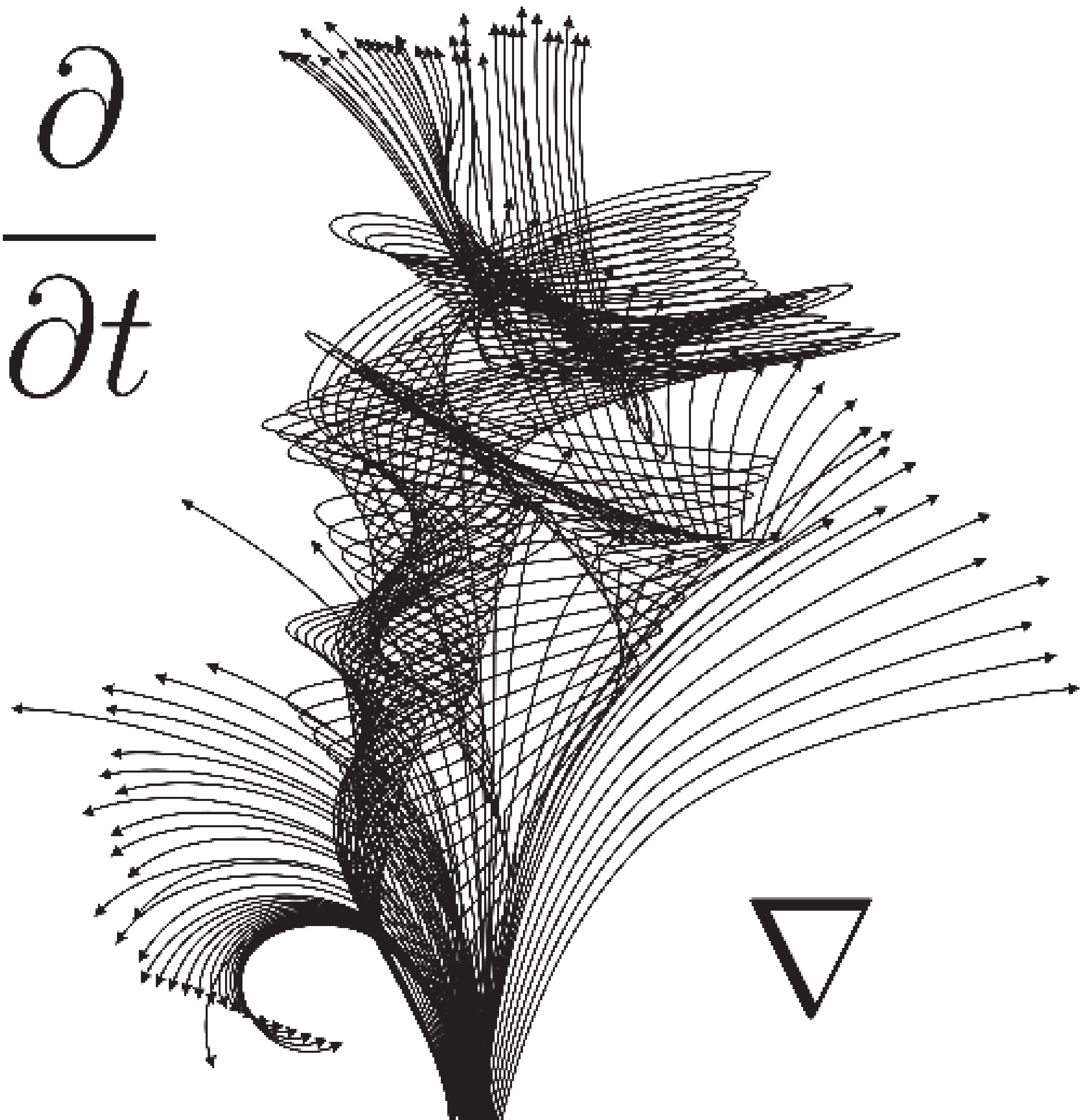
Lá atrás falava-se de Poisson. O que acontece se f passar a depender da própria solução u? Ficamos com uma equação não linear de aparência simples, mas, mais uma vez, muito rica matematicamente. Como protótipo, tomem-se as não-linearidades

$$-\Delta u(x) = u^p(x) \text{ para } x \in \Omega, \text{ um domínio limitado de } \mathbb{R}^N.$$

Esta equação está relacionada com a Equação de Schödinger Não Linear e com certos modelos em Astrofísica (há quem lhe chame a *Equação de Lane e Emden*, dois astrofísicos). Não havendo fórmulas para as soluções, que tipo de questões estuda um matemático? As mais naturais são as questões de existência de solução e, em caso de existência, se esta é única ou não (como o problema não é linear e não há condições iniciais mas sim de fronteira, em geral os problemas admitem uma infinidade de soluções). Após isso, procura-se estudar as propriedades qualitativas das soluções. Entre estas questões temos o sinal, possíveis simetrias, concentração em certas regiões do domínio, regularidade, entre muitas outras. O que se percebe na prática é que a estrutura das soluções depende muito do expoente p! O caso geral com outras não-linearidades f(u) é ainda mais complexo.

Há também vários tipos de métodos para atacar estes problemas, tanto Topológicos como Variacionais (em relação com Cálculo de Variações e Topologia Diferencial). São vários os temas de mestrado (e também de licenciatura) que podem nascer daqui, conforme os interesses de cada aluno: de uma revisão de literatura de certos métodos e resultados, até à leitura de artigos recentes e possíveis novas extensões a sistemas de equações acopladas. Uma boa referência é o artigo [H. Tavares, Semilinear elliptic problems: old and new, Boletim do CIM 2021 (disponível online)], que faz uma breve revisão de resultados e deixa algumas perguntas em aberto.

Resta-me terminar esta breve descrição dizendo que nada substitui uma boa conversa professor–aluno, convidando todos os interessados a visitarem a minha página pessoal, onde podem saber um pouco mais acerca do que faço e dos projetos em que estou envolvido (incluindo o projeto NoDES - Nonlinear Differential equations and Systems, que envolve outros professores do DM do Técnico e onde há possibilidade de bolsas de mestrado). ■



Computabilidade e Complexidade da Medição

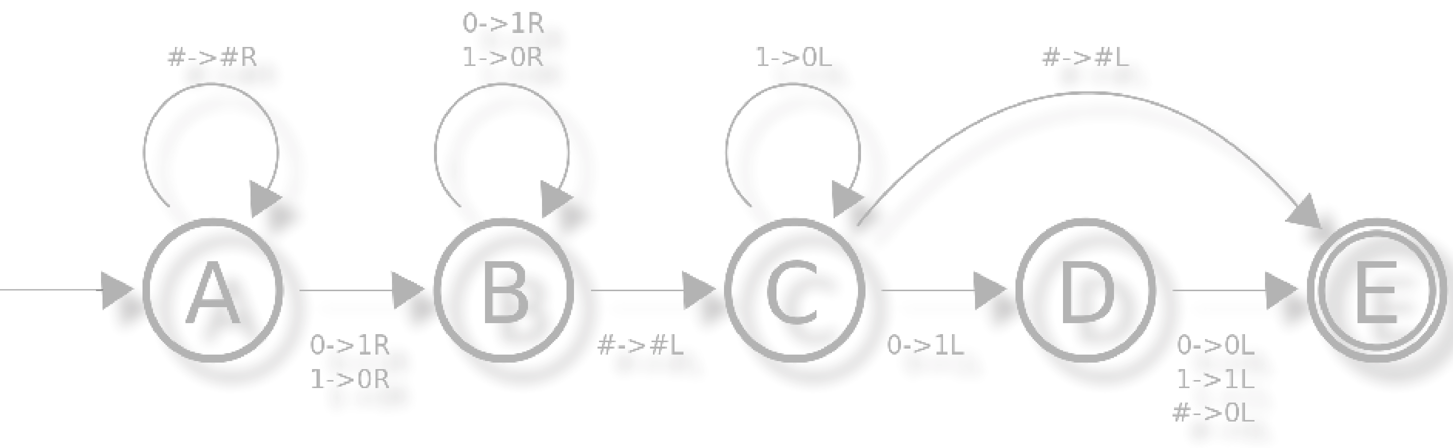
Por: **José Félix Costa**

Se alguém se perguntar por que razão os números reais são invocados nas Ciências, a resposta mais comum é a de que o mundo concreto é mais fácil de modelar e prever no *continuum*, principalmente devido ao sucesso e ao desenvolvimento da Análise Infinitesimal. Assim, quando no final de 1930, o modelo matemático do computador analógico de Vannevar Bush, que foi desenvolvido por Claude Shannon na sua tese de mestrado, resultou num sistema de equações diferenciais de um tipo particular, o qual descrevia uma rede de integradores mecânicos, onde *input* e *output* são variáveis de valor real. As condições iniciais ou, na configuração mais geral multidimensional, as condições de fronteira, são os dados. Embora os números reais possam codificar informação não computável em diferentes graus, a forma como são processados no computador analógico de Bush não permite descodificar o seu potencial conteúdo de informação e decidir o indecidível, concluindo-se que os números reais têm o mesmo papel, tanto na computação analógica, como nas ciências físicas. Porém, no caso do computador digital de von Neumann, um número real pode ser visto como um oráculo ou conselho... e adicionar poder computacional.

Partindo de um projeto arquitetado em 2007, para responder a uma sugestão do matemático Martin Davis, considerámos o experimentador (e.g. um físico experimental) como máquina de Turing e a experiência de medição ("extração" de um número real) como oráculo para a máquina de Turing. O algoritmo executado na máquina abstrai o método experimental de medição escolhido pelo experimentador, codificando a estrutura recursiva das ações experimentais. Na controversa suposição de que os números reais existem de facto no mundo real, o acesso ao seu conteúdo de informação permite computar acima do limite de Turing, i.e. os sistemas naturais ou artificiais que envolvam números reais podem executar processos não algorítmicos, mas para esse fim têm de executar medições dos seus próprios parâmetros internos. Podemos pois ter computação sem algoritmo, e.g. a teoria da evolução baseada na seleção natural é uma teoria processual para a qual a existência de algoritmo *a priori* é questionável. Porém, na melhor das hipóteses, considerando o tempo físico, ainda aguardamos evidência que refute a conjectura BCT: *Nenhuma medição física razoável tem um mapa de medição associado executável em tempo polinomial*. Por outro lado, as medições devem ser consideradas como informação com possível erro. A complexidade temporal de uma medição reduz o poder computacional destes cientistas abstratos. Essa redução das capacidades super-Turing pode ser tão grande que os números reais não adicionam mais poder do que os racionais (e isto na suposição de que os próprios racionais existem além da natureza discreta da matéria e da energia).

Entre 2007 e 2022, considerando o tempo das experiências e o erro das medições, determinámos as classes de complexidade envolvidas na computação eficiente (na "vizinhança" de BPP). Sintetizámos os nossos resultados, afirmando que, no melhor cenário, o poder dos sistemas computacionais em interação com o universo carateriza-se por computações probabilísticas, induzidas pelo erro das medições, com acesso a conselhos de comprimento sublogarítmico.

A investigação foi desenvolvida por mim, pelos meus coautores Edwin Beggs e John V. Tucker da Universidade de Swansea, com contribuições notáveis de alunos do Mestrado em Matemática Aplicada e Computação, nomeadamente: Bruno Miguel Carrajola Patrício (*Automated Search of Functions and Synthesis of Programs, 2019*), Eduardo de Arbués Moreira Castro Skapinakis (*Measuring quantities with analogue-digital systems, 2022*), Luís Filipe Fonseca (*The computational power of infinite precision measurements, 2020*), Vasco Boavida de Brito (*The power of unreliability in analogue-digital computation, 2017*), João Alves Alírio (*Scatter machines in bounded space, 2017*), Martim Maria Mathias Cortez de Lobão (*Identifying empirical laws, 2016*), Pedro Cortez Rodrigues (BPP/log★ (*Random walks as oracles), 2015*), Tânia Filipa Nascimento Ambaram (*Theory of two-sided experiments (A new insight on measurable numbers), 2014*), Diogo Miguel Ferreira Poças (*Complexity with costing and stochastic oracles, 2013*), Raimundo Coelho Leong (*Positive relativizations*



of $P = NP$ and $P \neq NP$ in the ARNN model, 2010), Bruno Serra Loff Barreto (*Physics, Computation, and Definability, 2007*). Como resultado do trabalho realizado com os alunos de mestrado, foram publicados artigos em livros e revistas internacionais consideradas de grande prestígio em Ciência da Computação: (a) 2 artigos publicados em *Proceedings of the Royal Society*, (b) 1 artigo publicado em *Mathematical Structures in Computer Science*, (c) 1 artigo publicado no *Theoretical Computer Science*, (d) 1 artigo publicado nos *Annals of Pure and Applied Logic*, (e) 2 artigos publicados no *Journal of Foundations of Computer Science*, (f) 1 artigo publicado no *Journal of Logic and Computation*, (g) 1 artigo publicado em *Applied Mathematics and Computation*, (h) 2 artigos publicados no *International Journal of Unconventional Computing*, (i) 1 artigo publicado no *Axiomathes*, (j) 5 artigos publicados em *Lecture Notes in Computer Science*, e (k) 3 artigos publicados em livros da Springer. Presumo que foi a primeira vez que altos padrões de publicação foram alcançados por um grupo de alunos de mestrado, trabalhando essencialmente no mesmo tópico de complexidade não uniforme, no intervalo de uma década.

E agora?

10010001

010101

PROBLEMA EM ABERTO

Consideremos a relação entre duas funções totais, $\psi, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi \prec \varphi$ se $\psi \in o(\varphi)$. Essa relação pode ser generalizada para duas classes de funções, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, dizendo que $\mathcal{F} \prec \mathcal{G}$ se existe uma função $\varphi \in \mathcal{G}$, tal que para todo o $\psi \in \mathcal{F}$, $\psi \prec \varphi$. Uma classe de funções $\mathcal{F}$ é considerada razoável se $\mathcal{F} = O(\mathcal{F})$. Exemplos são as iterações da função logaritmo, ou seja, a função tal que para *inputs* maiores ou iguais a 1 se comporta exatamente como a função $\log$ convencional, mas para *inputs* menores que 1 produz 0. Para cada ordinal α, define-se indutivamente a classe $\log^{(\alpha)}$:

(a) se α é 0, então $\log^{(0)} = O(1)$,

(b) se α for um ordinal sucessor, então

$$\log^{(\alpha+1)} = O(\{\lambda t.\log(\psi(t))) : \psi \in \log^{(\alpha)}\}),$$

(c) se α for um ordinal limite, então $\log^{(\alpha)} = O(\bigcap_{\gamma \in \alpha} \log^{(\gamma)})$.

Observe que temos:

$$\log^{(\omega)} \prec \ldots \prec \log^{(3)} \prec \log^{(2)} \prec \log^{(1)} \prec \log^{(0)}.$$

Para ver que $\log^{(\omega)}$ não é trivial considere a função $\log'$, definida por

(a) $\log'(t) = 0$, para $t = 0$,

(b) $\log'(t) = \min\{k : \log^{(k)}(t) \leq 1\}$.

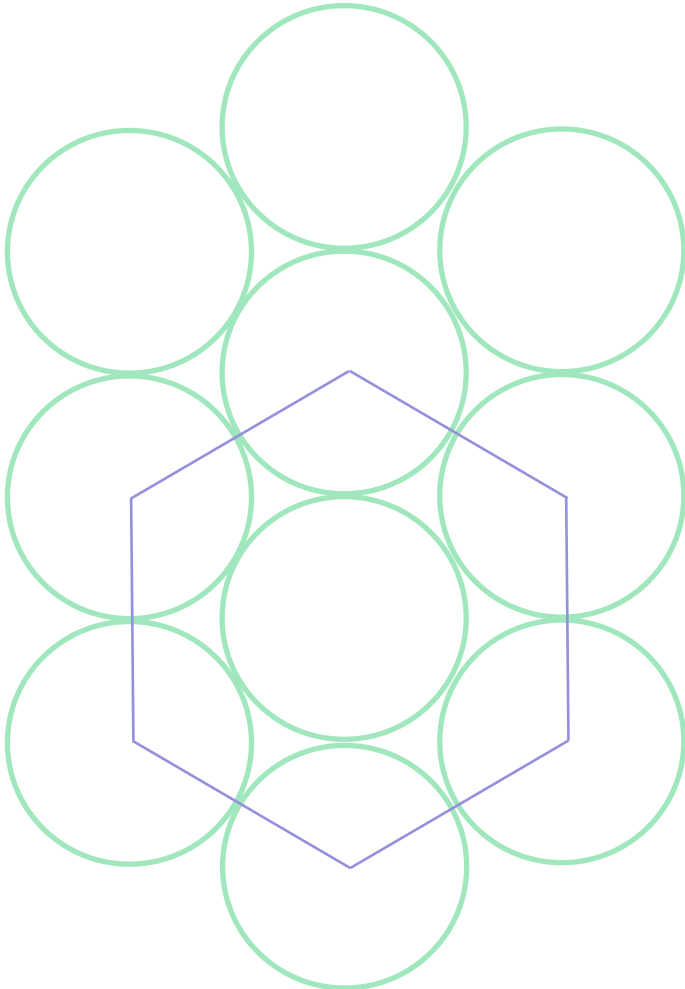
Para continuar a cadeia descendente definimos as classes $\log^{(\omega+k)}$, para $k \geq 1$, como a classe gerada por $\log^{(k)} \circ \log^{(\omega)}$. Novamente, tomamos o limite

$$\log^{(2\omega)} = O(\bigcap_{k \geq 1} \log^{(\omega+k)}).$$

a não trivialidade de $\log^{(2\omega)}$ é testemunhada pela função $\log'^{(2)} = \log' \circ \log'$.

O processo continua... Pode este raciocínio ser repetido para além de ω^{ω} sem se atingir o conjunto vazio? Caracterizar as funções crescentes na vizinhança de zero, consideradas como conselhos, permite definir uma nova hierarquia descendente de classes computacionais não uniformes entre BPP/log★ e BPP. Este resultado teria aplicações várias na resolução, tanto de problemas sobre sistemas computacionais que consultam oráculos com conteúdos de informação mais realistas, como de outros problemas que surgem na identificação (aprendizagem) de curto, médio e longo prazos de funções totais não computáveis, ambos objeto do nosso programa de investigação. ■

Empacotamentos esféricos e o princípio da incerteza do sinal



Por **Diogo Oliveira e Silva**

1. Empacotamentos esféricos

O nosso ponto de partida é um dilema recorrente do dia-a-dia: *Como empilhar laranjas de modo eficiente?* Ou, por forma a facilitar a compreensão a um matemático: *Que fração do espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$ pode ser coberta por bolas congruentes com interiores disjuntos?* Definindo um empacotamento esférico $\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ como uma união[1] $\varepsilon = \cup_{x\in X} B_1(x)$ e a densidade superior de ε como o limite superior do seguinte quociente de volumes,

$$\Delta_\varepsilon := \limsup_{R\to\infty} \frac{|\varepsilon \cap B_R|}{|B_R|},$$

o problema do empacotamento esférico consiste em determinar, para cada dimensão $d \geq 1$, o valor da constante ótima:

$$\Delta_d := \sup_{\varepsilon \subset \mathbb{R}^d \text{ empacotamento esférico}} \Delta_\varepsilon .$$

Estamos perante um dos enigmas mais fascinantes da matemática, que despertou o interesse de vultos históricos como Gauß, Kepler e Newton, e continua a intrigar a comunidade de matemáticos [6], físicos [1] e aficionados [8].

A solução só é conhecida em cinco casos muito particulares: $d \in \{1, 2, 3, 8, 24\}$. É trivial (e pouco estimulante) verificar que $\Delta_1 = 1$. O empacotamento ótimo em $\mathbb{R}^2$ corresponde ao reticulado hexagonal, logo $\Delta_2 = \pi / \sqrt{12} = 0.9069...$; a prova é elementar mas altamente não-trivial, e só foi elucidada em 1943 [14], mais de meio século depois da primeira tentativa rigorosa [15]. Sabe-se desde 1998 que o empacotamento ótimo em $\mathbb{R}^3$ é dado pelo *reticulado cúbico de face centrada* – verificando a *conjetura de Kepler* e revelando que $\Delta_3 = \pi / \sqrt{18} = 0.7405...$– mas a prova original [12] ultrapassa as 100 páginas e é tão intrincada que passou quase uma década até haver um consenso na comunidade científica[2].

Em 2016, Viazovska [16] surpreendeu tudo e todos ao provar que a solução em $\mathbb{R}^8$ é dada pelo reticulado

$$\left\{(x_j) \in \mathbb{Z}^8 \cup \left(\mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\right)^8 : \sum_{j=1}^{8} x_j \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\right\}$$

(e, por conseguinte, $\Delta_8 = \pi^4 / 384 = 0.2537...$) por via de um argumento simples, elegante e robusto. De facto, as técnicas desenvolvidas em [16] permitiram à equipa Cohn–Kumar–Miller–Radchenko–Viazovska [5] mostrar que o reticulado de Leech corresponde ao empacotamento ótimo em $\mathbb{R}^{24}$, e por isso $\Delta_{24} = \pi^{12} / 12! = 0.0019...$

[1]Para cada $x \in X$ num dado conjunto discreto $X \subset \mathbb{R}^d$, tomamos a bola aberta $B_1(x)$ de centro x e raio 1. Dois casos de especial interesse são os de empacotamentos (i) *reticulares* e (ii) *periódicos*; obtêm-se tomando (i) um *reticulado* $X \subset \mathbb{R}^d$, i.e., um subgrupo de $\mathbb{R}^d$ que é isomorfo a $\mathbb{Z}^d$ e que gera o espaço vetorial real $\mathbb{R}^d$, e (ii) uma união finita de translações de um empacotamento reticular.

[2]Em 2017 uma equipa de 22 matemáticos publicou uma prova formal da conjetura de Kepler [13].

A ferramenta fundamental por trás da solução dos casos $d \in \{8, 24\}$ é a *transformação de Fourier*, dada por

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-2\pi i x \cdot y) f(x) dx,$$

que define um automorfismo no espaço das funções de Schwartz. Se f é uma função de Schwartz, então num qualquer reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ vale a fórmula da soma de Poisson,

$$\sum_{x \in \Lambda} f(x) = \frac{1}{|\mathbb{R}^d/\Lambda|} \sum_{y \in \Lambda^*} \hat{f}(y),$$

onde $|\mathbb{R}^d/\Lambda|$ e Λ^* denotam, respetivamente, o *covolume* e o *reticulado dual* de Λ. Este é o único ingrediente necessário com vista a uma majoração razoável da constante Δ_d, obtido por via do seguinte problema de programação linear[3].

Teorema 1 (Cohn–Elkies [3], Gorbachev [11]). *Sejam* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *uma função de Schwartz* e $r > 0$ *tais que:*

(i) $f(0) = \hat{f}(0) > 0$;
(ii) $\hat{f}(y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^d$;
(iii) $f(x) \leq 0$ se $|x| \geq r$.

Então vale a desigualdade $\Delta_d \leq |B_{r/2}|$.

Iremos apresentar um esboço da prova apenas para empacotamentos reticulares. Uma modificação da mesma trata do caso de empacotamentos periódicos (cf. [3, Theorem 3.1]), o que é suficiente com vista à majoração em causa; cf. [3, Appendix A].

Prova do Teorema 1. Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ um reticulado, renormalizado de forma a que o comprimento mínimo de um vector não nulo de Λ seja igual a r. A densidade do empacotamento associado a Λ iguala $|B_{r/2}||\mathbb{R}^d/\Lambda|^{-1}$, por isso basta mostrar que $|\mathbb{R}^d/\Lambda| \geq 1$, o que, por seu turno, resulta diretamente da fórmula da soma de Poisson:

$$f(0) \geq \sum_{x \in \Lambda} f(x) = \frac{1}{|\mathbb{R}^d/\Lambda|} \sum_{y \in \Lambda^*} \hat{f}(y) \geq \frac{\hat{f}(0)}{|\mathbb{R}^d/\Lambda|}.$$

Na primeira e última desigualdades usámos as hipóteses (iii) e (ii), respetivamente. O resultado pretendido decorre então da hipótese (i). □

Uma inspeção da prova do Teorema 1 revela que a desigualdade $\Delta_d \leq |B_{r/2}|$ é de facto uma *igualdade* se e só se

$$f(x) = 0 = \hat{f}(y) \text{ para todo } (x, y) \in (\Lambda \setminus \{0\}) \times (\Lambda^* \setminus \{0\}).$$

O cerne da prova de Viazovska [16] consiste na descoberta de uma função de Schwartz $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ radial que satisfaz as hipóteses (i)–(iii) do Teorema 1 com $r = \sqrt{2}$, e tal que $f(x) = 0 = \hat{f}(x)$ sempre que $|x|^2 \in 2\mathbb{Z}_{>0}$. A construção usa *formas modulares*, um tópico prodigioso da teoria analítica dos números com implicações profundas e variadas. Ao leitor curioso recomendamos a referência [17] e passamos ao próximo capítulo.

2. Princípios da incerteza para a transformação de Fourier

O princípio da incerteza de Heisenberg data de 1927, e constitui um dos pilares da mecânica quântica. Traduz-se na seguinte desigualdade:

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} y^2 |\hat{f}(y)|^2 dy \geq \frac{1}{16\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^2.$$

A prova reduz-se a uma integração por partes e a uma aplicação da desigualdade de Cauchy–Schwarz. Assim sendo, (1) é uma *igualdade* se e só se $f(x) = \alpha \exp(-\beta x^2)$, onde $\beta > 0$ e $|\alpha|^2 = \sqrt{2\beta/\pi}$. Em 1933, Hardy investigou a desigualdade (1) e provou a seguinte variante: seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq C\exp(-a\pi x^2) \text{ e } |\hat{f}(y)| \leq C\exp(-b\pi y^2),$$
$$\text{para todos } x, y \in \mathbb{R} \text{ e alguns } C, a, b > 0;$$

então $f \equiv 0$ se $ab > 1$, e f é um múltiplo polinomial da gaussiana $\exp(-a\pi x^2)$ se $ab = 1$. Deste modo, as desigualdades de Heisenberg e Hardy exploram a relação entre a transformação de Fourier e as noções de *concentração* e *decaimento*, respetivamente; cf. [7]. Já em pleno século XXI, Bourgain, Clozel e Kahane [2] descobriram um novo princípio da incerteza, que se baseia na noção de *positividade*. Informalmente, traduz-se no seguinte princípio:

"Se uma função e a sua transformada de Fourier são não-positivas na origem e não identicamente nulas, então não podem ser ambas não-negativas fora duma vizinhança arbitrariamente pequena da origem."

Segue-se a formulação rigorosa. Dada uma função $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *eventualmente não-negativa*, seja $r(f) := \inf\{r > 0 : f(x) \geq 0 \text{ se } |x| \geq r\}$ o raio correspondente à última mudança de sinal de f. Dado um sinal $s \in \{\pm 1\}$, seja $\mathcal{A}_s(d)$ o conjunto das funções $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tais que:

- $f, \hat{f}$ são integráveis, e f é par;
- f é eventualmente não-negativa mas $\hat{f}(0) \leq 0$;
- $s\hat{f}$ é eventualmente não-negativa mas $sf(0) \leq 0$;

O *princípio da incerteza do sinal* garante que a quantidade

$$(2) \quad \mathbb{A}_s(d) := \inf_{f \in \mathcal{A}_s(d) \setminus \{0\}} \sqrt{r(f)\, r(s\hat{f})}$$

é estritamente positiva. Os autores de [2] provaram que $\mathbb{A}_+(d)$ de facto cresce com a raiz quadrada da dimensão d, e observaram que esse crescimento é natural face a propriedades conhecidas das funções zeta de Tate oriundas da teoria algébrica dos números. Em 2017, mostrámos [10] que o ínfimo em (2) é de facto um mínimo quando $s = +1$. Em particular, em cada dimensão $d \geq 1$ existe uma função radial $f \in \mathcal{A}_+(d)$, tal que

3. O termo *programação linear* refere-se à otimização de uma função linear sujeita a constrangimentos lineares. O problema de determinar f por forma a minimizar r pode ser descrito, após uma mudança de variáveis, como um programa linear num número infinito de variáveis.

$$\hat{f} = f,\ f(0) = 0, r(f) = \mathbb{A}_+(d).$$

Sabe-se ainda que qualquer minimizante tem um número infinito de zeros duplos no intervalo $(\mathbb{A}_+(d), \infty)$ (cf. [10, Theorem 4]), mas o valor exato de $\mathbb{A}_+(d)$ só foi determinado em $\mathbb{R}^{12}$: Cohn e Gonçalves [4] provaram em 2019 que $\mathbb{A}_+(12) = \sqrt{2}$. A desigualdade $\mathbb{A}_+(12) \geq \sqrt{2}$ decorre de uma fórmula da soma de tipo Poisson relacionada com a série de Eisenstein E_6 (esta última uma forma modular). A desigualdade $\mathbb{A}_+(12) \leq \sqrt{2}$ é menos imediata, e obtém-se adaptando a tecnologia desenvolvida por Viazovska [16] para a solução do problema do empacotamento esférico em $\mathbb{R}^8$.

Esta relação entre empacotamentos esféricos e o princípio da incerteza do sinal poderá parecer surpreendente, mas é fácil de explicar no caso do sinal $s = -1$. Se f é uma solução ótima do problema de programação linear de Cohn–Elkies–Gorbachev em $\mathbb{R}^d$, descrito no Teorema 1, então $g := \hat{f} - f$ é um minimizante para o problema $\mathbb{A}_-(d)$; cf. [4]. Uma vez que as soluções ótimas do Teorema 1 são conhecidas em dimensões $d \in \{1, 8, 24\}$, temos de imediato que

$$\mathbb{A}_-(1) = 1;\ \mathbb{A}_-(8) = \sqrt{2}; \mathbb{A}_-(24) = 2.$$

Juntamente com o já referido $\mathbb{A}_+(12) = \sqrt{2}$, esta é uma lista completa das soluções conhecidas para o princípio da incerteza do sinal. Uma vez que o empacotamento ótimo em $\mathbb{R}^2$ é bem conhecido – embora o problema de Cohn–Elkies–Gorbachev correspondente esteja ainda em aberto – conjetura-se que

$$\mathbb{A}_-(2) \stackrel{?}{=} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Até há pouco tempo, não havia mais nenhuma conjetura em qualquer outra dimensão.

3. Um problema em aberto

Em 2020, adicionámos uma nova entrada à lista de conjeturas para o princípio da incerteza do sinal.

Conjetura 1: (Gonçalves–OS–Ramos [9]). $\mathbb{A}_+(1) \stackrel{?}{=} (2\varphi)^{-1/2}$, onde $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ *denota o número de ouro*.

A Conjetura 1 resulta de uma generalização do princípio da incerteza do sinal que possibilita a formulação de princípios análogos a (2) em contextos muito variados; cf. [9, Theorem 1.1]. Em particular, temos agora à nossa disposição um princípio da incerteza do sinal $s = +1$ em grupos cíclicos finitos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, e este parece convergir numericamente para o problema $\mathbb{A}_+(1)$ quando n tende para infinito. A resolução computacional do problema de programação linear associado ao princípio da incerteza do sinal +1 em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, para uma sequência apropriada de valores de n, levou à formulação da Conjetura 1 e produziu um esboço preliminar que revela os contornos misteriosos de um possível minimizante de $\mathbb{A}_+(1)$. Atente-se na Figura 1, que levanta mais perguntas do que oferece respostas. ■

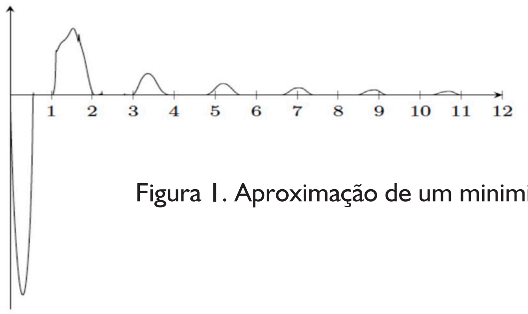


Figura 1. Aproximação de um minimizante para o problema $\mathbb{A}_+(1)$.

Referências

[1] N. Afkhami-Jeddi, H. Cohn, T. Hartman, D. de Laat, A. Tajdini, High-dimensional sphere packing and the modular bootstrap. J. High Energy Phys. 2020, no. 2, Paper No. 066, 44 pp.
[2] J. Bourgain, L. Clozel, J.-P. Kahane Principe d'Heisenberg et fonctions positives. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 60 (2010), no. 4, 1215–1232.
[3] H. Cohn, N. Elkies, New upper bounds on sphere packings. I. Ann. of Math. (2) 157 (2003), no. 2, 689–714.
[4] H. Cohn, F. Gonçalves, An optimal uncertainty principle in twelve dimensions via modular forms. Invent. Math. 217 (2019), no. 3, 799–831.
[5] H. Cohn, A. Kumar, S. Miller, D. Radchenko, M. Viazovska, The sphere packing problem in dimension 24. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 3, 1017–1033.
[6] J. H. Conway, N. Sloane, Sphere packings, lattices and groups. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 290. Springer-Verlag, New York, 1999.
[7] G. Folland, A. Sitaram, The uncertainty principle: a mathematical survey. J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), no. 3, 207–238.
[8] M. Gardner, Sphere packing, Lewis Carroll, and reversi. Cambridge University Press, Cambridge; Mathematical Association of America, Washington, DC, 2009.
[9] F. Gonçalves, D. Oliveira e Silva, J. P. Ramos, New sign uncertainty principles. arXiv:2003.10771.
[10] F. Gonçalves, D. Oliveira e Silva, S. Steinerberger, Hermite polynomials, linear flows on the torus, and an uncertainty principle for roots. J. Math. Anal. Appl. 451 (2017), no. 2, 678–711.
[11] D. V. Gorbachev, An extremal problem for entire functions of exponential spherical type, which is connected with the Levenshtein bound for the density of a packing of $\mathbb{R}^n$ by balls. Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform. 6 (2000), no. 1, Matematika, 71–78.
[12] T. C. Hales, A proof of the Kepler conjecture. Ann. of Math. (2) 162 (2005), no. 3, 1065–1185.
[13] T. Hales; M. Adams, G. Bauer, T. Dang, J. Harrison, H. Le Truong, C. Kaliszyk, V. Magron, S. McLaughlin, T. Nguyen, Q. Nguyen, T. Nipkow, S. Obua, J. Pleso, J. Rute, A. Solovyev, T. Ta, T. An, T. Nam Trung, T. Trieu, J. Urban, K. Vu, R. Zumkeller, A formal proof of the Kepler conjecture. Forum Math. Pi 5 (2017), e2, 29 pp.
[14] L. Fejes Tóth, Über die dichteste Kugellagerung. Math. Z. 48 (1943), 676–684.
[15] A. Thue, Om nogle geometrisk-talthoeretiske Theoremer. Forhandlingerne ved de Skandinaviske Naturforskeres 14 (1892), 352–353.
[16] M. Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 3, 991–1015.
[17] D. Zagier, Elliptic modular forms and their applications. The 1-2-3 of modular forms. 1–103, Universitext, Springer, Berlin, 2008.

DCentral

Por **Catherine Mulligan**

Over the past decades, our world has been fundamentally reshaped by digital technologies. The first wave of digital technologies connected the world and transformed the 20th century industry, making business faster and cheaper. In the 21st century, however, a new series of decentralized technologies – also known as Web 3.0 - is challenging the foundations of our economy, our society, and our interactions with the environment – the very foundations that we have relied upon as “solid” for several centuries.

DCentral is the lab launched by the Blockchain for Innovation and Social Good (BIG) project – we are an interdisciplinary team of researchers working across Computer Science, Design and Economics to critically assess decentralized technologies and their ability to assist us in responding to these changes; our aim is to understand how decentralisation can create sustainability and social good through developing multi-disciplinary solutions. We organize around three main research themes: using decentralisation to achieve **resilience**, the **new economic paradigms** associated with decentralisation, and last but certainly not least the **new technology paradigms** required to support and deliver the promise of decentralisation.

We are working to address how we can redefine how infrastructure development and funding works around the world, for example. We are looking at how we can use Web 3.0 infrastructures to redefine how we build energy, water, and food infrastructures around the world with Gambia, Rwanda and elsewhere. We are also investigating how and where decentralisation can make the most impact concerning innovation and economic growth. We are working to create a positive impact in Portugal and across Europe through creating start-ups with students, catalysing the technological innovations around cryptocurrency and blockchain. We work closely with end-user communities, governments, start-ups, and others to make all of this happen.

You might wonder why all of this is relevant to mathematics – but Web 3.0 raises several interesting interdisciplinary questions that are deeply connected to mathematics – here I raise a few of them. I am not a mathematician, but rather I have worked closely with them before for different projects in the UK – if you are interested in such ideas don’t hesitate to reach out, I’d love to hear from you

Measuring Decentrality

How decentralised are our blockchain solutions? Many people explain blockchain and associated technologies through the lens of decentralisation – but to truly measure that, we need better methods of measurement. Our current approaches are, mathematically speaking, rather inadequate – they focus on a separation of concerns between “how decentralised are the governance mechanisms?” or for the network layer of the protocols. Decentrality is measured by using degree centrality, betweenness centrality and closeness centrality. What is really needed, however, is a method to measure the level of decentralisation across all of the different protocol solutions and a means by which to effectively communicate that to the end-users of those services.

Building a New GDP Measure for the Blockchain Era

Another example is the issue of measuring a digital economy: in a traditional economic context, economists address allocative efficiency and abstract away the technological problems of achieving technical efficiency. As we move further into a digital – and a decentralised finance world – we need a better measure of the inputs and outputs of the digital economy – which are increasingly orthogonal to one another.

DCentral has internships available! If you or your supervisor are interested to hear more on these or even topics of your choosing, drop me a line on:

catherine.mulligan@tecnico.ulisboa.pt

■

Reais, Complexos, Quaterniões e mais: A construção de Cayley-Dickinson

Por: **Duarte Maia**

Ao longo da história, os matemáticos criaram e estudaram diversos géneros de números. Os mais úteis no dia-a-dia são os números inteiros $\mathbb{Z}$, reais $\mathbb{R}$ e complexos $\mathbb{C}$, mas existem outros conjuntos, estes menos conhecidos mas ainda com utilidade, como os quaterniões $\mathbb{H}$ e os octoniões $\mathbb{O}$.

O objetivo deste artigo é falar destes conjuntos mais complicados, não sob a perspetiva de aplicações, mas sim sobre a perspetiva de como os construir e como essa construção pode ser generalizada, dando azo a conjuntos ainda maiores, como os sedeniões $\mathbb{S}$ e mais.

Começando com os números reais, estes conjuntos podem ser vistos como construídos uns em cima dos outros. Os complexos podem ser construídos a partir dos reais adicionando um elemento i que satisfaz $\mathrm{i}^2 = -1$. Os quaterniões podem ser vistos como adicionando mais dois elementos, j e k, também satisfazendo $\mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$. Os octoniões adicionam ainda mais quatro raízes quadradas de -1, os sedeniões adicionam oito, etc.

Para perceber melhor estas construções, é conveniente começar pelo caso mais simples: Como podemos construir $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$? Esta questão poderá parecer supérflua, dado que todos sabemos o que são os números complexos, mas é uma questão importante porque se soubermos construir os complexos a partir dos reais poderemos tentar iterar essa construção, fazendo surgir os quaterniões e assim por diante. Assim sendo, apresentam-se algumas definições do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$:

i) Definição "à engenheiro": Os números complexos são coisas da forma $\mathrm{a} + \mathrm{bi}$, com $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{i}^2 = -1$,

ii) Definição rigorosa simples: Identificar os complexos com $\mathbb{R}^2$, ou seja, ver o número complexo $\mathrm{a}+\mathrm{bi}$ como o par (a, b). Definir a soma e o produto de complexos como intuído pela regra $\mathrm{i}^2 = -1$, i.e.

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) + (\mathrm{c}, \mathrm{d}) = (\mathrm{a} + \mathrm{c}, \mathrm{b} + \mathrm{d}),$$
$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \cdot (\mathrm{c}, \mathrm{d}) = (\mathrm{ac} - \mathrm{bd}, \mathrm{bc} + \mathrm{ad}).$$

iii) Definição simbólica algébrica: resume-se a uma versão mais rigorosa da definição à engenheiro. A sua explicação requer falar de anéis de polinómios e quocientes, por isso regista-se apenas a definição simbólica:

$$\mathbb{C} \cong \frac{\mathbb{R}[\mathrm{x}]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$$

iv) Finalmente, a minha definição preferida: a definição matricial. É sobre esta definição que o resto do artigo incide, por isso explicá-la-ei em detalhe.

Existem várias formas de intuir à definição matricial. A mais elementar é reparar que a matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

satisfaz a identidade $J^2 = -1$, que é semelhante a $i^2 = -1$. Assim sendo, podemos identificar os números complexos com um conjunto de matrizes (reais) 2 × 2:

$$a + bi \approx aI + bJ.$$

Por outras palavras, definimos $\mathbb{C}$ como o conjunto das matrizes 2 × 2 da forma

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M\,(2x2, \mathbb{R})$$

As operações neste conjunto são as operações induzidas pela estrutura de matriz, sendo necessário verificar que somas e produtos de matrizes desta forma continuam a ser desta forma. Pelo lado positivo, recebemos algumas propriedades de graça, por exemplo a associatividade e distributividade do produto (mas não a comutatividade, que tem de ser verificada manualmente).

Um detalhe agradável é que várias operações nos números complexos podem ser vistas como induzidas a partir de operações de matrizes. Por exemplo:

a) A operação de conjugado $z \mapsto \overline{z}$ coincide com a transposição de matrizes, sendo imediata a propriedade $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ da regra $(AB)^T = B^T A^T$,

b) A norma pode ser calculada como $|z|^2 = \det z$, vindo de graça propriedades como $|zw| = |z||w|$.

O conjunto dos quaterniões é uma coleção de números “acima dos complexos”, da mesma forma que os complexos estão “acima dos reais”. Há também várias formas de os definir. Historicamente, eles foram concebidos de forma semelhante à definição “à engenheiro” dos complexos: os quaterniões são coisas da forma $a + bi + cj + dk$, em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e, crucialmente, a multiplicação entre estes novos “números” satisfaz as regras

$$ij = k = -ji,\; jk = i = -kj,\; ki = j = -ik.$$

Repare-se no facto que os quaterniões *não são comutativos para a multiplicação*. Devido a isto, seria difícil adivinhar a definição de quaterniões sem saber da sua existência. Isto também dificulta a adaptação das definições dadas acima. Por exemplo, não é imediato adaptar a definição ii), pois a mesma demonstração usada para justificar que os complexos são comutativos poderia ser usada para justificar que os quaterniões o são.

Entra, então, a definição matricial. Por analogia, vemos os quaterniões como uma coleção de matrizes 2 × 2 de entradas complexas da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{C},$$

mas não é assim tão simples...

A primeira complicação surge porque, tal como com a definição ii), a mesma demonstração usada em $\mathbb{C}$ serve para justificar que estas matrizes são todas comutativas. Outra complicação surge porque algumas das regras que tão bem funcionavam anteriormente, deixam agora de funcionar. Por exemplo, antes tinhamos que o determinante de uma matriz nos dava a sua norma $a^2 + b^2$, e, por arrasto, qualquer matriz não-nula tinha inverso (que era preciso verificar estar sempre em $\mathbb{C}$). No entanto agora o determinante, que continua a ser $a^2 + b^2$, nem sempre é diferente de zero, por exemplo para a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, os “quaterniões” resultantes nem sempre permitem divisão.

Isto sugere tentar encontrar alguma modificação que faça com que o determinante seja $|a|^2 + |b|^2$. Para esse efeito, podemos tentar conjugar uma das linhas da matriz de modo ao determinante ser $a\overline{a} + b\overline{b}$, o que leva, por exemplo, à definição[1]

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq M\,(2x2, \mathbb{C}) \qquad (1)$$

Agora sim, tudo o que foi feito para os complexos se transpõe para os quaterniões:

i) A associatividade do produto vem da associatividade da multiplicação de matrizes,
ii) Idem para distributividade,
iii) O conjugado quaterniónico é induzido pelo transposto conjugado, isto é, $\overline{w} = w^*$,
iv) O determinante dá o quadrado da norma, etc.

Tudo funciona como esperado, exceto a demonstração de comutatividade, visto que os conjugados na segunda linha estragam alguma da simetria necessária para essa prova.

O processo não precisa de parar aqui. Podemos iterar e construir os chamados octoniões...

1. Os quartiniões denotam-se com um $\mathbb{H}$ em honra de Sir William Rowan Hamilton, que os descobriu em 1843.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, \mathrm{a, b} \in \mathbb{H},$$

Mas, mais uma vez, encontramos um problema.

É desejado que o produto de dois octoniões seja também um octonião. No entanto, se calcularmos o produto de duas matrizes da forma (1), obtemos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - b\bar{d} & ac + b\bar{c} \\ -\bar{b}c - \bar{a}\bar{d} & -\bar{b}d + \bar{a}\bar{c} \end{bmatrix}$$

e repare-se que *em geral, a matriz obtida não é da forma* (1), dado que

$$\overline{\mathrm{ac} - \mathrm{b}\bar{\mathrm{d}}} = \bar{\mathrm{c}}\,\bar{\mathrm{a}} - \mathrm{d}\,\bar{\mathrm{b}},$$

que não é igual a $\bar{a}\,\bar{c} - \bar{b}d$ *a não ser que a multiplicação das entradas seja comutativa*. Isto explica porque é que isto não foi um problema até os octoniões, mas passa a ser a partir destes.

A solução parece excessiva, mas consiste em modificar ligeiramente a noção de produto de matrizes. A noção usual de produto de matrizes 2×2 é dada por

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$$

e para prosseguir com o nosso processo substituimo-la pela operação subtilmente diferente

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + c_2b_1 & b_2a_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_2d_1 \end{bmatrix}$$

em que a única mudança é a ordem de alguns produtos em algumas casas. Claro que esta mudança não faz diferença se a multiplicação dos elementos das matrizes for comutativa, mas passa a fazer diferença precisamente quando os escalares são os quaterniões.

Felizmente, esta é a última mudança necessária para definir a construção de Cayley-Dickinson: Se $\mathbb{A}_n$ é um conjunto no qual está definido uma soma, um produto e uma operação de conjugação, definimos $\mathbb{A}_{n+1}$ como sendo o conjunto das matrizes da forma

$$\mathbb{A}_{n+1} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \middle| \ \mathrm{a, b} \in \mathbb{A}_n \right\} \subseteq \mathrm{M}\,(2\mathrm{x}2, \mathbb{A}_n)$$

em que definimos a soma em $\mathbb{A}_{n+1}$ como a soma usual de matrizes, o produto como o produto modificado de matrizes $\mathrm{A} \circ \mathrm{B}$, e o conjugado como o transposto conjugado (transpôr a matriz e conjugar todos os seus elementos).

Começando este processo com $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$ obtemos $\mathbb{A}_1 = \mathbb{C}$, $\mathbb{A}_2 = \mathbb{H}$, $\mathbb{A}_3 = \mathbb{O}$, $\mathbb{A}_4 = \mathbb{S}$ (um conjunto de números chamados sedeniões), e assim por diante.

Uma propriedade interessante desta sequência de conjuntos é que a regularidade da multiplicação vai ficando cada vez pior. Em todos os casos, a soma é comutativa e associativa, e verifica-se a propriedade distributiva $\mathrm{z}(\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2) = \mathrm{zw}_1 + \mathrm{zw}_2$. No entanto, verificar que $\mathbb{A}_{n+1}$ tem uma certa propriedade requer que $\mathbb{A}$ tenha uma propriedade mais forte, por exemplo:

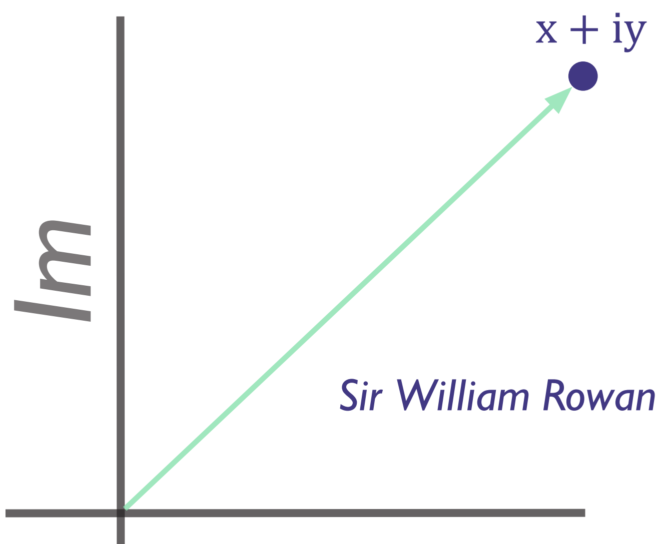
i) Para justificar que $\mathbb{C}$ é comutativo, é necessário usar o facto que em $\mathbb{R}$, $\bar{\mathrm{x}} = \mathrm{x}$,

ii) Para justificar que $\mathbb{H}$ é associativo (i.e. $(\mathrm{xy})\mathrm{z} = \mathrm{x}(\mathrm{yz})$) é necessário usar o facto que $\mathbb{C}$ é comutativo,

iii) Consequentemente, não é possível provar (porque não é verdade) que os octoniões $\mathbb{O}$ são associativos... Mas é possível justificar uma propriedade mais fraca, chamada alternância, que diz que se z e w são octoniões temos $\mathrm{z}(\mathrm{zw}) = (\mathrm{zz})\mathrm{w}$ e $\mathrm{z}(\mathrm{ww}) = (\mathrm{zw})\mathrm{w}$. Para justificar esta propriedade, é necessária a associatividade de $\mathbb{H}$,

iv) Pelo que a alternância não se verifica nos sedeniões $\mathbb{S}$...

A construção de Cayley-Dickinson não é normalmente exposta desta forma, assemelhando-se mais à definição dos complexos como pares. Normalmente define-se $\mathbb{A}_{n+1}$ como sendo o conjunto dos pares (a, b), $\mathrm{a, b} \in \mathbb{A}_n$, com multiplicação definida de certa forma. No entanto, a definição matricial tem o benefício de nos permitir usar certas ferramentas de álgebra linear, como determinantes, que nos podem dar informação extra sobre elementos destes objetos novos. O maior inconveniente é a necessidade de adaptar algumas das operações de modo aos A_n terem comportamentos razoáveis, mas felizmente este é um processo que converge após três passos. ■



Sir William Rowan Hamilton

Agradecimentos:

O NMATH quer agradecer a todos aqueles que nos apoiaram na realização deste projeto, seja na forma de aconselhamento, divulgação ou apenas incentivo.

Ficha Técnica:

Ponto Fixo
NMATH-IST
Avenida Rovisco Pais Nº1
Lisboa

Versão Digital disponível em:
nmath.tecnico.ulisboa.pt/pontofixo

Tipos de Letra Principais:

- Humanst521 BT
- Trebuchet MS
- Cambria Math

Editores:

Armando Assembleia
Isabel Nogueira
Mafalda Pires
Sara Gutierrez
Tomás Carrondo

Intervalo:

Duarte Maia
Maria Madrugo

Design:

Armando Assembleia
Sara Gutierrez
Tomás Carrondo

Revisão:

Armando Assembleia
Isabel Nogueira
Luís Maia
Mafalda Pires
Martim Rêgo
Sara Gutierrez
Tomás Carrondo