Analysis III, Übungsblatt Nr. 8

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 22.12.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Für $d \geq 1$ sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.

Aufgabe 1 (Lebesgue-Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ eine Funktion mit $\int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > \lambda\}) d\lambda < \infty$. Zeigen Sie, dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$:

(a) $f(x) < \infty$.

(b) Es gilt

$$\lim_{\substack{\mu(Q)\to 0\\ x\in Q}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y) - f(x)| dy = 0. \qquad \text{(hier ist } Q \subset \mathbb{R}^d \text{ ein dyadischer Würfel)}$$

Aufgabe 2 (Absolut stetige und singuläre Maße)
Seien ν, ν_1, ν_2 Radon-Maße auf $\mathbb{R}^d$.

(a) Betrachten Sie die folgenden Bedingungen:

(a1)

$$\forall E \subset \mathbb{R}^d : \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

(a2)

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \Big[\sup_{E:\ \mu(E) \leq \epsilon} \nu(E) \Big] = 0.$$

Zeigen Sie: (a1) impliziert (a2), aber im Allgemeinen gilt die Umkehrimplikazion nicht.

Falls die Bedingung (a2) erfüllt ist, ist das Maß ν *absolut stetig* bezüglich μ und wir schreiben $\nu \ll \mu$. Wir schreiben auch $\nu \perp \mu$ wenn ν *singulär*[1] bezüglich μ ist. Zeigen Sie:

(b) Sind $\nu_1 \perp \mu$ und $\nu_2 \perp \mu$, so ist $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

(c) Sind $\nu_1 \ll \mu$ und $\nu_2 \ll \mu$, so ist $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(d) Sind $\nu \perp \mu$ und $\nu \ll \mu$, so ist $\nu = 0$.

---

[1] Vgl. Definition 1.58 im Skript.

Aufgabe 3 (Faltung von Funktionen)

Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen.

(a) Zeigen Sie: Für fast alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $h_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die durch

$$h_x(y) = f(x-y)g(y)$$

definiert wird, integrierbar.

Die *Faltung* von f und g ist definiert als

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy & \text{wenn } y \mapsto f(x-y)g(y) \text{ integrierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(b) Die Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)| dx \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| dx \Big).$$

(c) Es gilt: $f * g = g * f$.

(d) Ist zusätzlich f stetig und beschränkt, so ist $f * g$ stetig.

(e) Es[2] gilt: $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Aufgabe 4 (Approximation der Eins)

Für $t > 0$ definieren Sie die Funktion $\Phi_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_t(x) dx = 1$ für jedes $t > 0$.

(b) $\widehat{\Phi_t}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$.

(c) $\Phi_s * \Phi_t = \Phi_{s+t}$ für alle $s, t > 0$.

(d) Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} |f * \Phi_t(x) - f(x)| dx = 0.$$

[2] Die Fourier-Transformation $f \mapsto \widehat{f}$ wurde für integrierbares f im Übungsblatt Nr. 7 definiert.