Analysis III, Übungsblatt Nr. 7

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 15.12.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

$\boxed{\text{Für } d \geq 1 \text{ sei } \mu \text{ das Lebesgue-Maß auf } \mathbb{R}^d.}$

Aufgabe 1 (Grenzwert und Integral vertauschen)
Es ist einfach, die Werte der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

zu erraten. Zeigen Sie, dass Ihre Vermutungen richtig sind.

Aufgabe 2 (Riemann-Lebesgue)
Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Definieren Sie:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

Zeigen Sie:

(a) $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)| dx \to 0$ wenn $|h| \to 0$.

(b) $|\widehat{f}(\xi)| \to 0$ wenn $|\xi| \to \infty$.

Aufgabe 3 (Cantor-Funktion)
Seien $\mathcal{C} \subset [0,1]$ die Cantor-Menge und $\mathcal{F} : [0,1] \to [0,1]$ die Cantor-Funktion.[1] Wir wissen schon, dass die Funktion $\mathcal{F}$ monoton steigend ist. Insbesondere erzeugt sie ein äußeres Maß, das ν gennant wird. Wie in der Vorlesung sei $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ die Teilmenge aller Elemente, die *keine* endliche ternäre Darstellung besitzen, und sei $\widetilde{I} \subset [0,1)$ die Teilmenge aller Elemente, die *keine* endliche binäre Darstellung besitzen. Sei $\mathcal{N} \subset \widetilde{I} \subset [0,1]$ eine nicht-messbare Teilmenge des Einheitsintervalles, die nur solche Elemente enthält.

Beweisen Sie:

(a) Die Einschränkung $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ definiert eine Bijektion zwischen $\widetilde{\mathcal{C}}$ und $\widetilde{I}$.

(b) Die Menge $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{N})$ erfüllt $\mu(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{N})) = 0$ und ist deswegen Lebesgue-messbar.

(c) Die Menge $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{N})$ ist auf $\widetilde{\mathcal{C}}$ nicht ν-messbar.

---

[1] Vgl. Seiten 30-32 des Skripts.

Aufgabe 4 (Fubini)

Sei $\{b_k\}$ eine positive Folge mit $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = s < \infty$, und $a_n := \sum_{k \leq n} b_k$.
Definieren Sie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in der folgenden Weise:

$$f(x,y) = \begin{cases} a_n & \text{wenn } n \leq x < n+1 \text{ und } n \leq y < n+1; \quad (n \in \mathbb{N}) \\ -a_n & \text{wenn } n \leq x < n+1 \text{ und } n+1 \leq y < n+2; \ (n \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$, definieren Sie die *Schnitten*:

$$f^y(x) := f(x,y) \text{ und } f_x(y) := f(x,y).$$

Beweisen Sie:

(a) Jede Schnitte f^y und f_x hat ein endliches Integral. Für jedes $x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f_x(y)dy = 0$ und deswegen

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \Big) dx = 0.$$

(b) Trotzdem

$$\int_{\mathbb{R}} f^y(x)dx = \begin{cases} a_0 & \text{wenn } 0 \leq y < 1; \\ a_n - a_{n-1} & \text{wenn } n \leq y < n+1. \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

Deswegen hat $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f^y(x)dx$ ein endliches Integral auf $(0, \infty)$ und

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \Big) dy = s.$$

(c) Die Funktion f hat ein unendliches Integral:

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(x,y)| dxdy = \infty.$$