Analysis III, Übungsblatt Nr. 6

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

universitätbonn

Abgabe in der Vorlesung am 08.12.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Für $d \geq 1$ seien μ_* und μ das äußere Lebesgue-Maß bzw. das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.

Aufgabe 1 (Tchebychev-Ungleichung)

Sei $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ eine Funktion. Sei $\alpha > 0$ und $E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > \alpha\}$. Zeigen Sie:

$$\mu_*(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Aufgabe 2 (Integrierbarkeit und Verhalten im ∞)

(a) Existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, so dass $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$, aber trotzdem

$$\limsup_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

gilt? Begründen Sie Ihre Behauptung!

(b) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige, integrierbare Funktion, so gilt

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0.$$

Aufgabe 3 (Integrierbarkeit und Superniveaumengen)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$. Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren Sie die Mengen

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > 2^k\} \text{ und } F_k := \{x \in \mathbb{R}^d : 2^k < f(x) \leq 2^{k+1}\}.$$

Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Die Funktion f hat ein endliches Integral.
(ii) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(F_k) < \infty$.
(iii) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(E_k) < \infty$.

(b) Definieren Sie die Funktionen

$$f_1(x) := \begin{cases} |x|^{-\alpha} & \text{wenn } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(x) := \begin{cases} |x|^{-\beta} & \text{wenn } |x| > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(b1) Die Funktion f_1 hat ein endliches Integral, genau dann wenn $\alpha < d$.
(b2) Die Funktion f_2 hat ein endliches Integral, genau dann wenn $\beta > d$.

Aufgabe 4 (Verfeinerung des Lemmas von Fatou)

Sei $p \in (0, \infty)$. Sei $\{f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)\}$ eine Folge messbarer Funktionen, so dass

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert und endlich ist. Nehmen wir an, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^p dx < \infty.$$

Beweisen Sie:

(a) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C_\epsilon < \infty$, so dass

$$\Big| |a+b|^p - |b|^p \Big| \leq \epsilon |b|^p + C_\epsilon |a|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

(b) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \Big| |f_n(x)|^p - |f_n(x) - f(x)|^p - |f(x)|^p \Big| dx = 0.$$

Hinweis: Definieren Sie $G_n^\epsilon := \left(\Big| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \Big| - \epsilon |f_n - f|^p \right)_+$ und benutzen Sie Teil (a), um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} G_n^\epsilon = 0.$$