Analysis III, Übungsblatt Nr. 5

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 01.12.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Für $d \geq 1$ seien μ_* und μ das äußere Lebesgue-Maß bzw. das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.

Aufgabe 1 (Lebesgue-Messbarkeit)
Wir betrachten Funktionen $\{f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist f stetig, so ist f Lebesgue-messbar.

(b) Ist f monoton steigend, so ist f Lebesgue-messbar.

(c) Ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-messbarer Funktionen, so sind

$$\sup_n f_n(x) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

Lebesgue-messbar.

(d) Sind f, g Lebesgue-messbar, so sind $f + g$, $f \cdot g$ und $\min\{f, g\}$ Lebesgue-messbar.

Aufgabe 2 (Lipschitz-Funktionen und Nullmengen)
Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Lipschitz-Funktion. Beweisen Sie:

$$E \subset \mathbb{R}^d : \mu(E) = 0 \Longrightarrow \mu(f(E)) = 0.$$

Aufgabe 3 (Andere Cantor-Mengen)
Sei α eine reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$. Man beginnt mit dem abgeschlossenen Intervall [0,1]. Aus diesem Intervall wird das offene mittlere Subintervall der Länge α entfernt, also alle Zahlen, die strikt zwischen $(1 - \alpha)/2$ und $(1 + \alpha)/2$ liegen. Übrig bleiben die beiden Intervalle $[0, (1 - \alpha)/2]$ und $[(1 + \alpha)/2, 1]$. Aus diesen beiden Intervallen wird wiederum jeweils das offene mittlere Subintervall der *relativen* Länge α entfernt und man erhält nun vier geschlossene Intervalle. Dieser Schritt wird unendlich oft wiederholt. Der Schnitt all dieser Mengen ist dann die *α-Cantor-Menge*, die als $\mathcal{C}_\alpha$ bezeichnet wird.
Beweisen Sie:

(a) Das Komplement von $\mathcal{C}_\alpha$ in $[0, 1]$ ist eine Vereinigung offener Intervallen mit totaler Länge gleich 1.

(b) $\mu_*(\mathcal{C}_\alpha) = 0$.

(c) Die Hausdorff-Dimension der α-Cantor-Menge erfüllt $\dim \mathcal{C}_\alpha = \frac{\log 2}{\log(2/(1-\alpha))}$.

Aufgabe 4 (Brunn-Minkwoski-Ungleichung)

Die Summe zweier messbarer Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ wird definiert als

$$A + B := \{x \in \mathbb{R}^d : x = x' + x'' \text{ wobei } x' \in A \text{ und } x'' \in B\}.$$

Beweisen Sie die Brunn-Minkwoski-Ungleichung

$$\mu(A+B)^{1/d} \geq \mu(A)^{1/d} + \mu(B)^{1/d} \tag{1}$$

wenn:

(a) $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ d-dimensionelle Quader sind;

(b) $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ endliche Vereinigungen d-dimensioneller Quader mit disjunktem Inneren sind;

(c) $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ offene Mengen mit $\mu(A), \mu(B) < \infty$ sind;

(d) $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakte Mengen sind;

(e) $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ messbare Mengen sind, so dass $A + B$ auch messbar ist.