Analysis III, Übungsblatt Nr. 4

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 24.11.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Für $d \geq 1$ sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.

Aufgabe 1 (σ-Algebra)

Gibt es eine σ-Algebra, die als Menge abzählbar unendlich ist? Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 2 (Borel-Cantelli)

Sei $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine abzählbare Familie Lebesgue-messbarer Mengen des $\mathbb{R}^d$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty.$$

Definieren Sie:

$$E := \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ für unendlich viele } k\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge E ist Lebesgue-messbar.

(b) $\mu(E) = 0$.

Aufgabe 3 (Jordan-Inhalt) [1]

Der äußere Jordan-Inhalt $J_*(E)$ einer Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ wird durch

$$J_*(E) = \inf \sum_{k=1}^{N} |I_k|$$

definiert, wobei das Infimum über alle *endliche* Überdeckungen $E \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ mit Intervallen I_k genommen ist.

(a) Zeigen Sie: $J_*(E) = J_*(\overline{E})$, wobei $\overline{E}$ der Abschluss von E bezeichnet.

(b) Nennen Sie ein Beispiel von einer abzählbaren Menge $E \subset [0, 1]$ mit $J_*(E) = 1$ und $\mu(E) = 0$.

---

[1] Das Ziel dieser Übung ist zu zeigen, dass *endliche* Subadditivität nicht reicht, um äußere Maße definieren zu können.

Aufgabe 4 (Hausdorff-Dimension)

Aufgabe 4 von Übungsblatt Nr. 3 impliziert, dass das äußere Hausdorff-Maß m_α^* ein σ-additives Maß auf die Borel-Mengen ist. Wir beschränken uns auf die Borel-Megen und schreiben $m_\alpha(E)$ statt $m_\alpha^*(E)$. Gegeben sei eine Borel-Menge $E \subset \mathbb{R}$, wissen wir schon, dass ein eindeutiges α existiert, so dass

$$m_\beta(E) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \beta < \alpha \\ 0 & \text{falls } \alpha < \beta \end{cases}$$

In diesem Fall sagen wir, dass die *Hausdorff-Dimension* von E gleich α ist und schreiben $\alpha = \dim E$.

(a) Seien $0 < \gamma \leq 1$ und $E = \overline{E} \subset [0,1]$. Sei $f : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\gamma \quad \text{für ein } M < \infty \text{ und für alle } x, y \in E \tag{1}$$

erfüllt. Zeigen Sie:

(a1) $m_\beta(f(E)) \leq M^\beta m_\alpha(E)$ für $\beta := \alpha/\gamma$.

(a2) $\dim f(E) \leq \frac{1}{\gamma} \dim E$.

Seien nun $\mathcal{C} \subset [0,1]$ die Cantor-Menge und $\mathcal{F}$ die Cantor-Funktion.[2] Beweisen Sie:

(b) Die Cantor-Funktion $\mathcal{F}$ erfüllt Bedingung (1) mit $E = \mathcal{C}$ und $\gamma = \log 2/\log 3$.

(c) $\dim \mathcal{C} = \log 2/\log 3$.

[2] Beide wurden in der Vorlesung definiert, vgl. Seiten 30–32 des Skripts.