Analysis III, Übungsblatt Nr. 3

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

universitätbonn

Abgabe in der Vorlesung am 17.11.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Äußere Maße)
Definieren Sie Abbildungen $\mu_1, \mu_2, \mu_3 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ und $\mu_4, \mu_5 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist leer} \\ 1 & A \text{ ist nicht leer} \end{cases} \qquad \mu_2(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist leer} \\ \infty & A \text{ ist nicht leer} \end{cases}$$

$$\mu_3(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \#(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})$$

$$\mu_4(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist beschränkt} \\ 1 & A \text{ ist unbeschränkt} \end{cases} \qquad \mu_5(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist leer} \\ 1 & A \text{ ist nicht leer und beschränkt} \\ \infty & A \text{ ist unbeschränkt} \end{cases}$$

(a) Entscheiden Sie für jede der Abbildungen, ob μ_j ein äußeres Maß ist.

(b) Bestimmen Sie für jede Abbildung μ_j, die ein äußeres Maß ist, die jeweilige Familie der messbaren Mengen.

Aufgabe 2 (Offene und geschlossene Mengen und Messbarkeit)
Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Beweisen Sie:

(a) Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist eine abzählbare Vereinigung dyadischer Würfeln.

(b) Jede geschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist Lebesgue-messbar.

Aufgabe 3 (Beispiel: μ und τ stimmen auf erzeugenden Mengen nicht notwendig überein)
Seien $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\alpha > d$. Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller dyadischen Würfeln in $\mathbb{R}^d$. Definieren Sie die Abbildung $\tau : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ durch

$$\tau(Q) := 2^{k\alpha}, \quad \forall Q \in \mathcal{T} : \mathrm{scale}(Q) = k.$$

Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu(E) := \inf_{\substack{\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}: \\ \bigcup_{T \in \mathcal{T}'} T \supset E}} \sum_{\mathcal{T}'} \tau(T)$$

Zeigen Sie: $\mu(Q) = 0$ für alle $Q \in \mathcal{T}$.

Aufgabe 4 (Äußeres Hausdorff Maß)

Seien $\alpha, \beta > 0$ und $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Ist E eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, so heißt

$$m_\alpha^*(E) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$$

das *äußere α-dimensionelle Hausdorff Maß* von E, wobei[1]

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) := \inf \left\{ \sum_k (\text{diam } F_k)^\alpha : E \subset \bigcup_{k=1}^\infty F_k, \ \text{diam } F_k \leq \delta \text{ für alle } k \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $\delta_1 \geq \delta_2$, so ist $\mathcal{H}_\alpha^{\delta_1}(E) \leq \mathcal{H}_\alpha^{\delta_2}(E)$.

(b) Die Abbildung $m_\alpha^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ ist in der Tat ein äußeres Maß.

(c) Ist $\inf\{|x - y| : x \in E_1, y \in E_2\} > 0$, so ist

$$m_\alpha^*(E_1 \cup E_2) = m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2).$$

(d) Sind $m_\alpha^*(E) < \infty$ und $\beta > \alpha$, so ist $m_\beta^*(E) = 0$. Sind $m_\alpha^*(E) > 0$ und $\beta < \alpha$, so ist $m_\beta^*(E) = \infty$.

[1] Hier bezeichnet diam S den Durchmesser von $S \subset \mathbb{R}^d$ d.h. diam $S = \sup\{|x - y| : x, y \in S\}$.