Analysis III, Übungsblatt Nr. 2

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 10.11.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Algebra und σ-Algebra)
Sei X eine Menge und sei $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Algebra*, falls Folgendes gilt:

- $X \in \mathcal{A}$.
- Für $A \in \mathcal{A}$ ist auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- Für $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *σ-Algebra*, wenn außerdem die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A} := \{A \subseteq X : A \text{ endlich oder } X \setminus A \text{ endlich}\}$ ist eine Algebra.

(b) Die Algebra $\mathcal{A}$ aus Teil (a) ist genau dann eine σ-Algebra, wenn X eine endliche Menge ist.

(c) Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige Algebra, so gehören die Schnitte $A \cap B$ und die *symmetrische Differenz*

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

zweier Elemente $A, B \in \mathcal{A}$ ebenfalls zu $\mathcal{A}$.

Aufgabe 2 (Subadditivität)
Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ eine σ-additive Funktion, d.h. Bedingung 2 von Satz 1.1 im Skript wird erfüllt. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots$ abzählbar viele, nicht unbedingt paarweise disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Aufgabe 3 (Banach-Tarski)

Wie im Beweis des Satzes 1.2 vom Skript betrachten wir die Menge $K = B_1(0) \setminus M$, wobei

$$M := \{x \in B_1(0) : x = gx \text{ für ein } g \in G, g \neq I\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt abzählbar viele Vektoren $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$, so dass

$$M = \{x \in B_1(0) : x = \lambda v_k \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Es existiert $e \in \mathbb{S}^2$ mit der folgenden Eigenschaft: Für $t_1 \neq t_2$ sind die Mengen M_{t_1} und M_{t_2} disjunkt, wobei $M_t := M + te$ für $-1 \leq t \leq 1$.

(c) $\mu(K) = \mu(B_1(0))$.