Analysis III, Übungsblatt Nr. 12

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Abgabe in der Vorlesung am 09.02.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (δ-Kalkül)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion durch $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ definiert. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta(f(x, y))dxdy.$$

Aufgabe 2 (Young-Ungleichung)
Sei $p, q, r \geq 1$ mit $1/p + 1/q + 1/r = 2$. Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ und $h \in L^r(\mathbb{R}^d)$. Beweisen Sie:

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(g * h)(x)dx \Big| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen

$$\alpha(x, y) = f(x)^{p/r'} g(x - y)^{q/r'}, \quad \beta(x, y) = g(x - y)^{q/p'} h(y)^{r/p'}, \quad \textit{und} \quad \gamma(x, y) = f(x)^{p/q'} h(y)^{r/q'},$$

wobei $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1/r + 1/r' = 1$.

Aufgabe 3 (3-Volumen in $\mathbb{R}^5$)
Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$\begin{aligned} u &= (1, 2, 3, 4, 5), \\ v &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ w &= (1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Berechnen Sie das 3-Volumen von dem durch u, v, w erzeugten Parallelepiped.

Aufgabe 4 (Gaußscher Satz)

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $x^2 + y^2 \leq 1$. Sei

$$g(z) = z \cos\Big(\frac{2\pi z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\Big).$$

Berechnen Sie die Ableitung g'.

(b) Sei $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie:

$$\int_B 2 + \cos\Big(\frac{2\pi z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\Big) - z \frac{2\pi}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \sin\Big(\frac{2\pi z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\Big) dxdydz.$$

Aufgabe 5 (Umordnungen)

Für $d \geq 1$ sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$. Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Borel Menge mit $\mu(A) < \infty$, so definiert man die *symmetrische Umordnung* von A, als A^* bezeichnet, als der offene Ball mit dem Ursprung als Zentrum und $\mu(A^*) = \mu(A)$. Die *symmetrische, fallende Umordnung* einer charakteristischen Funktion χ_A wird als

$$\chi_A^* := \chi_{A^*}$$

definiert. Ist $f : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ eine messbare Funktion mit $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, so definiert man die *symmetrische, fallende Umordnung* von f als

$$f^*(x) := \int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}^*(x) dt.$$

Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ zwei solche Funktionen. Beweisen Sie:

(a) Die Umordnung f^* ist eine nicht-negative, messbare, radial symmetrische Funktion, so dass

$$f^*(x) \leq f^*(y) \text{ wenn } |x| \geq |y|.$$

(b) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, so ist

$$f^*(x) \leq g^*(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

(d) Es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x)dx.$$

(e) Nehmen Sie zusätzlich an, dass $f = f^*$ und $f(x) < f(y)$ immer wenn $|x| > |y|$. Wann ist die Ungleichung in (d) eine Gleichheit?