Analysis III, Übungsblatt Nr. 10

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

universitätbonn

Abgabe in der Vorlesung am 26.01.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Gute Kerne)
Eine Familie von Funktionen $\{K_\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\}_{\delta>0}$ heißt eine *Familie von guten Kernen*, wenn für alle $\delta > 0$

(i) $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)dx = 1$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|dx \le A < \infty$. (Hier ist A unabhängig von δ.)

(iii) Für jede $\eta > 0$
$$\int_{|x|\ge\eta} |K_\delta(x)|dx \to 0, \text{ wenn } \delta \to 0.$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^d$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = 1$. Definieren Sie $\Phi_\delta(x) := \delta^{-d}\varphi(x/\delta), \delta > 0$. Zeigen Sie, dass $\{\Phi_\delta\}_{\delta>0}$ eine Familie von guten Kernen ist.

Aufgabe 2 (Interpolation in L^p-Räume)
Seien $p_1, p_2, p_3 \in (1,\infty)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $p_1 < p_2 < p_3$, so ist
$$L^{p_2} \subset L^{p_1} + L^{p_3}.$$

(b) Sei $\theta \in (0,1)$. Ist $\frac{1}{p_2} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_3}$, so ist
$$\|f\|_{p_2} \le \|f\|_{p_1}^{\theta} \|f\|_{p_3}^{1-\theta}.$$

Aufgabe 3 (Minkowski-Ungleichung für Integrale)
Seien (X_1, ν_1) und (X_2, ν_2) zwei σ-endliche Maßräume, und sei $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion.

(a) Seien $1 \le p < \infty$ und $f \ge 0$. Zeigen Sie:
$$\Big(\int_{X_1}\Big(\int_{X_2} f(x,y)d\nu_2(y)\Big)^p d\nu_1(x)\Big)^{1/p} \le \int_{X_2}\Big(\int_{X_1} f(x,y)^p d\nu_1(x)\Big)^{1/p} d\nu_2(y).$$

(b) Seien $1 \le p \le \infty$ und $f(\cdot, y) \in L^p(\nu_1)$ für fast alle y. Angenommen ist, dass die Funktion $y \mapsto \|f(\cdot,y)\|_p$ in $L^1(\nu_2)$ ist. Beweisen Sie:

(b1) Die Funktion $f(x,\cdot) \in L^1(\nu_2)$ für fast alle x.

(b2) Die Funktion $x \mapsto \int_{X_2} f(x,y)d\nu_2(y)$ ist in $L^p(\nu_1)$.

(b3) Es gilt:
$$\Big\|\int_{X_2} f(\cdot,y)d\nu_2(y)\Big\|_p \le \int_{X_2} \|f(\cdot,y)\|_p d\nu_2(y).$$

Aufgabe 4 (Integraloperatoren)

Seien $p \in [1, \infty]$ und $1/p + 1/q = 1$. Sei $K : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $K(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} K(x, y)$ für alle $\lambda > 0$ und so dass

$$\int_0^\infty |K(x, 1)| x^{-1/p} dx = C < \infty.$$

Für $f \in L^p$ und $g \in L^q$ definieren Sie die Operatoren

$$Tf(y) := \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx \quad \text{und} \quad Sg(x) := \int_0^\infty K(x, y) g(y) dy.$$

Beweisen Sie:

(a) Die Funktionen Tf und Sg sind fast überall wohldefiniert.

(b) Es gilt: $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$ und $\|Sf\|_q \leq C\|f\|_q$.

Seien nun

$$Tf(y) := y^{-1} \int_0^y f(x) dx \quad \text{und} \quad Sg(x) := \int_x^\infty y^{-1} g(y) dy.$$

Zeigen Sie:

(c) Sind $1 < p \leq \infty$ und $1 \leq q < \infty$, so ist

$$\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p \text{ und } \|Sg\|_q \leq q\|g\|_q.$$