

---

**Abgabe in der Vorlesung am 03.11.2015.**  
 Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

---

### Aufgabe 1 (Partielle Integration)

(a) Für  $m, n \in \mathbb{N}$  berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx.$$

(b) Für  $n \in \mathbb{N}$  berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx.$$

### Aufgabe 2 (Volumen)

(a) Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids:

$$\mathcal{E} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}. \quad (a \geq b \geq c > 0)$$

(b) Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

$$\text{vol}(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,$$

wobei  $K := \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ .

### Aufgabe 3 (Gradientenfelder)

Sei  $g \in C^1((0, \infty))$  reellwertig. Sei  $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch  $F(x) = g(\|x\|)x$ .

(a) Seien  $c > 0$  und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  eine  $C^1$ -Kurve, so dass  $\|\gamma(t)\| = c$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma} F = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass  $F$  rotationsfrei ist, d.h.  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$  für jedes  $i \neq j$  und für jedes  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

(c) Zeigen Sie, dass  $F$  ein Gradientenfeld ist.