Analysis II, Übungsblatt Nr. 9

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 29.06.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Faltungen)

(a) Zeigen Sie, dass das Faltungsprodukt assoziativ ist. Das heißt, für $f, g, h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ zeigen Sie

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

(b) Sei $f = \chi_I$ die charakteristische Funktion von $I := [-1, 1]$. Berechnen Sie $f * f$ und $(f * f) * f$.

Aufgabe 2 (Gaußsches Integral)

Sei $L := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. Schreiben Sie

$$L^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

und benutzen Sie Polarkoordinaten um $L = \sqrt{\pi}$ zu zeigen.

Aufgabe 3 (Ellipsoide)

Sei $a \geq b \geq c > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids:

$$\mathcal{E} := \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Big\}.$$

Aufgabe 4 (Zum Satz von Fubini)

Wir betrachten die Funktion $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } y = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

(b) Warum steht dies nicht im Widerspruch zum in der Vorlesung bewiesenen Satz über die Vertauschbarkeit der Doppelintegralen?