Analysis II, Übungsblatt Nr. 8

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 22.06.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Umkehrfunktionen)
Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$F(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

definierte Abbildung.

(a) Berechnen Sie die Jakobi-Matrix von F und, wo sie existiert, ihre Inverse.

(b) Bestimmen Sie die Menge

$$\mathcal{M} := F(\{x \in \mathbb{R}^2 : \det(DF(x)) \neq 0\}).$$

(c) Zeigen Sie, dass F surjektiv ist und dass jeder Punkt $(u, v) \in \mathcal{M}$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.

Aufgabe 2 (Implizite Funktionen)
Diskutieren Sie die Höhenlinien der Funktion $F : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y) = xye^{-x}e^{-y}$$

und untersuchen Sie insbesondere in welchen Rechtecken $I \times J \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$ sich die Mengen

$$\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = c\}$$

in der Form

$$\{(x, y) \in I \times J : y = \phi(x)\} \text{ bzw. } \{(x, y) \in I \times J : x = \psi(y)\}$$

mit differenzierbaren Funktionen $\phi : I \to J$ bzw. $\psi : J \to I$ darstellen lassen.

Aufgabe 3 (Parameterabhängige Integrale I)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt$$

durch Differenzieren des Integrals

$$F(y) := \int_0^x e^{-ty} dt.$$

Aufgabe 4 (Parameterabhängige Integrale II)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ seien

$$f(y) := \int_0^1 g(x,y)dx \text{ und } f^*(y) := \int_0^1 D_2 g(x,y)dx.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind wohldefiniert.

(b) Die Funktion f ist differenzierbar.

(c) $f'(0) \neq f^*(0)$.

(d) Warum gibt es keinen Widerspruch zum Satz 2.32 im Skript?