Analysis II, Übungsblatt Nr. 7

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 08.06.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Ein ergodischer Satz)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(x + 2\pi) = f(x)$, und sei α/π irrational.

(a) Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von f punktweise gegen f konvergiert:

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n)e^{inx} = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x + n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

Aufgabe 2 (Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^2$)
Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{für } y > 0 \\ x & \text{für } y = 0 \\ -\sqrt{x^2 + y^2} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

(a) Ist f stetig im Punkt $(0, 0)$?

(b) Ist f partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$?

(c) Ist f total differenzierbar im Punkt $(0, 0)$?

Begründen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 3 (Implizite Funktionen)

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^3 + z + xy = 1$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x, y)$ hat.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Teil (a) differenzierbar ist. Berechnen Sie $Dg(x, y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein lokales Extremum oder um einen Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 4 (Alternative Berechnung von $\zeta(2)$)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass alle komplexe Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n+1} = 1$$

durch $-\cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, $k = 1, 2, \dots, 2n$, gegeben sind.

(b) Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{k=1}^{2n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{3}.$$

(c) Zeigen Sie für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ die Abschätzung

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \cot^2 x + 1.$$

(d) Beweisen Sie nun mit Teil (b) und (c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$