Analysis II, Übungsblatt Nr. 6

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 01.06.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Taylor-Formel)
Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y},$$

im Punkt $(1,1)$ bis zu den Gliedern 2. Ordnung. Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler im $B_{\frac{1}{2}}((1,1))$.

Aufgabe 2 (Kettenregel)

(a) Zeigen Sie: Für jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es ein $c < \infty$, so dass $\|Tv\| \leq c\|v\|$ für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(b) Beweisen Sie: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $g : U \to V$ sowie $f : V \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen. Die Abbildung g sei in $x \in U$ differenzierbar und die Abbildung f im Punkt $y = g(x) \in V$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ im Punkt x differenzierbar und es gilt

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x).$$

Aufgabe 3 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten)
Sei $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$.
Sei $p : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung definiert durch

$$p(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Zeigen Sie: Ist $f : U \to \mathbb{R}^2$ eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, so gilt auf der Menge $p^{-1}(U)$ die Gleichung

$$(\Delta f) \circ p = \frac{\partial^2 (f \circ p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial (f \circ p)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (f \circ p)}{\partial \theta^2}.$$

Aufgabe 4 (Lokale Extrema)
Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

Begründen Sie Ihre Behauptungen!