Analysis II, Übungsblatt Nr. 5

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 18.05.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Projektionssatz)

Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines komplexen Hilbert-Raums H, und sei $x_0 \in H$. Zeigen Sie, dass für $x \in K$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\|x_0 - x\| = \inf_{y \in K} \|x_0 - y\|$

(ii) $\Re\langle x_0 - x, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in K$.

Aufgabe 2 (Konvergenz von Fourierreihen)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(0) = 0$ und

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{für } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

(b) Seien $\{a_n\}_{n=1}^N$ und $\{b_n\}_{n=1}^N$ zwei endliche Folgen komplexer Zahlen. Seien $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ die partiellen Summen der Reihe $\sum b_n$. Zeigen Sie die *abelsche partielle Summation* Formel:

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

(c) Beweisen Sie den folgenden Konvergenztest: Sei $\{a_n\}$ eine Folge positiver reellen Zahlen die monoton gegen 0 fällt. Sei $\sum b_n$ eine Reihe mit beschränkten Partialsummen. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n b_n$.

(d) Beachten Sie, dass die Funktion f aus Aufgabenteil (a) nicht stetig ist. Zeigen Sie trotzdem, dass die Fourierreihe von f für alle x konvergiert. Insbesondere ist der Wert der Reihe an der Stelle 0 gleich dem Durchschnitt der rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerten der Funktion an der Stelle 0.

Aufgabe 3 (Kugelkoordinaten)

Berechnen Sie die totale Ableitung der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

Aufgabe 4 (Beispiel zu Schwarz)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Berechnen Sie für $(x,y) \neq (0,0)$

$$D_1 f(x,y),\ D_2 f(x,y),\ D_1 D_2 f(x,y) \ \text{ und } D_2 D_1 f(x,y),$$

und verifizieren Sie insbesondere die Aussage des Satzes von Schwarz für $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f überall zweimal partiell differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie: $D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0)$.