Analysis II, Übungsblatt Nr. 4

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 11.05.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Komplementärräume und Abschluss)
Sei U ein Unterraum eines Hilbert-Raums H. Zeigen Sie:

$$\overline{U} = (U^{\perp})^{\perp}.$$

Aufgabe 2 (Orthonormalbasen und Separabilität)
Sei H ein unendlichdimensionaler Hilbert-Raum. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) H ist separabel.

(b) Alle Orthonormalbasen sind abzählbar.

(c) Es gibt eine abzählbare Orthonormalbasis.

Aufgabe 3 (Unbeschränkte Variation auf $L^2[0,1)$)
Sei $\epsilon > 0$. Sei $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) := \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} \sum_{|I|=2^{-k}} |I|^{\frac{1}{2}+\epsilon} h_I(x) \tag{1}$$

und sei $F : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ das Martingal definiert durch

$$F(J) := \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} \sum_{|I|=2^{-k}} |I|^{\frac{1}{2}+\epsilon} H_I(J).$$

(Wie in der Vorlesung sind h_I die Haarsche Funktion auf dem dyadischen Intervall $I \in \mathcal{I}$ und H_I ihr zugehöriges Martingal.)
Zeigen Sie:

(a) $F \in L^2[0,1)$.

(b) Die Funktion f ist wohldefiniert (d.h. der Limes in (1) existiert für alle $0 \le x < 1$).

(c) Die Funktion f ist nicht von beschränkter Variation auf $[0,1)$.

Aufgabe 4 (Gram-Schmidt und Legendrepolynome)

In der Vorlesung haben wir den reellen Hilbert-Raum $L^2[0,1)$ betrachtet. Den reellen Hilbert-Raum $L^2[-1,1]$ kann man analog definieren. $L^2[-1,1]$ enthält Funktionen von beschränkter Variation; für zwei solche Funktionen $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ hat man

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Als Ziel dieser Aufgabe ist Folgendes zu beweisen: Wendet man das Gram-Schmidt Verfahren auf $L^2[-1,1]$ und x_n mit $x_n(t) = t^n$, $n \geq 0$, an, erhält man

$$e_n(t) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(t), \text{ wobei } P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \Big(\frac{d}{dt}\Big)^n (t^2-1)^n.$$

Zeigen Sie nacheinander die folgenden Aussagen für $t \in [-1,1]$ und $n, m \in \mathbb{N}$:

(a) $P_n(1) = 1$.

(b) $P'_{n+1}(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \Big(t(t^2-1)^n \Big)$.

(c) $P'_{n+1}(t) = (2n+1)P_n(t) + P'_{n-1}(t)$.

(d) $P'_{n+1}(t) = tP'_n(t) + (n+1)P_n(t)$.

(e) $nP_n(t) = tP'_n(t) - P'_{n-1}(t)$.

(f) $(1-t^2)P'_n(t) = nP_{n-1}(t) - ntP_n(t)$.

(g) $Q_n(t) := \frac{d}{dt}\Big((1-t^2)P'_n(t) \Big) + n(n+1)P_n(t) = 0$.

(h) Für $n \neq m$ sind P_n und P_m orthogonal in $L^2[-1,1]$.

(i) $R_n(t) := (n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0$.

(j)
$$\int_{-1}^{1} P_n(t)^2 dt = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{1} P_{n-1}(t)^2 dt \text{ für } n \geq 2.$$

(k) $\Big\{ \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n \Big\}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2[-1,1]$, die durch Orthonormalisierung der Funktionen x_n, $x_n(t) = t^n$, entsteht.

Bemerkung: Sofern Sie einen Aufgabenteil nicht bearbeiten können, so nutzen Sie dessen Aussage für den Beweis der nächsten Teilaufgaben.