

# Analysis II, Übungsblatt Nr. 3

**Mathematisches Institut**  
Prof. Dr. Christoph Thiele  
Dr. Diogo Oliveira e Silva  
Sommersemester 2015



---

**Abgabe in der Vorlesung am 04.05.2015.**

Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

---

## Aufgabe 1 (Vollständigkeit)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a<sub>1</sub>) Jede Cauchy-Folge  $(x_n) \subset X$  konvergiert in  $X$ .
- (a<sub>2</sub>) Für jede Menge  $\mathcal{A}$  von abgeschlossenen Kugeln in  $X$  mit den Eigenschaften
  - (i)  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{A}, B_1 \subseteq B_2$  oder  $B_2 \subseteq B_1$
  - (ii)  $\forall \epsilon > 0$ , es gibt eine Kugel  $B \in \mathcal{A}$  mit Radius  $< \epsilon$gilt

$$\bigcap_{B \in \mathcal{A}} B \neq \emptyset.$$

(b) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

## Aufgabe 2 (Separabilität)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (a<sub>1</sub>)  $X$  ist separabel.
- (a<sub>2</sub>) Jede offene Überdeckung von  $X$  besitzt eine (höchstens) abzählbare Teilüberdeckung.

(b) Jeder kompakte metrische Raum ist separabel.

## Aufgabe 3 (Hilbert-Räume über $\mathbb{R}$ )

Sei  $H$  ein reeller Hilbert-Raum und sei  $A \subset H$  eine Teilmenge. Der *Komplementärraum*  $A^\perp$  von der Teilmenge  $A \subset H$  ist die Menge aller Vektoren, die orthogonal zu  $A$  sind:

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp y \text{ für alle } y \in A\}.$$

Zeigen Sie: Der Komplementärraum einer Teilmenge eines Hilbert-Raums ist ein abgeschlossener Untervektorraum.

**Aufgabe 4 (Hilbert-Räume über  $\mathbb{C}$ )**

Sei  $H$  ein komplexer Hilbert-Raum. Wie in der Vorlesung definieren wir das komplexe Skalarprodukt von  $x, y \in H$  als

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) + \frac{i}{2}(\|x + iy\|^2 - \|x\|^2 - \|iy\|^2).$$

Zeigen Sie: Für alle  $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  gilt

- (a)  $\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \mu \langle x_2, y \rangle$ .
- (b)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .
- (c)  $\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y_1 \rangle + \bar{\mu} \langle x, y_2 \rangle$
- (d)  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ .
- (e)  $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\| = \|x - y\|$  und  $\|x + iy\| = \|x - iy\|$ .
- (f)  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .