Analysis II, Übungsblatt Nr. 2

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

universitätbonn

Abgabe in der Vorlesung am 27.04.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Fourierreihen)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) := x - \pi$ für $x \in [0, 2\pi)$. Berechnen Sie die Fourierreihe von f, und benutzen Sie das Resultat zur Berechnung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Aufgabe 2 (Inneres, Abschluss, Rand)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Der Punkt x heißt *Randpunkt* von A, wenn in jeder offenen Kugel von x sowohl ein Punkt von A als auch ein Punkt von $M \setminus A$ liegt. Die Menge aller Randpunkte von A heißt der *Rand* von A und wird mit ∂A bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $A \setminus \partial A$ ist offen.

(b) Die Menge $A \cup \partial A$ ist abgeschlossen.

(c) Der Rand ∂A ist abgeschlossen.

Aufgabe 3 (Abstand zweier Mengen)
Sei $(\mathbb{R}^d, \rho)$ der euklidische Raum mit der kanonischen Metrik ρ definiert durch $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Seien $A, K \subset \mathbb{R}^d$ mit $A \cap K = \emptyset$. Wir definieren den Abstand von K und A als

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf\{\rho(x, y) : x \in K, y \in A\}.$$

(a) Seien K kompakt und A abgeschlossen. Zeigen Sie: $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.

Hinweis: Nehmen Sie an $\operatorname{dist}(K, A) = 0$ und benutzen Sie die Folgencharakterisierung von inf um geeignete Folgen zu konstruieren.

(b) Seien K und A lediglich abgeschlossen. Bleibt die Aussage in Teil (a) richtig?

Aufgabe 4 (Kompaktheit)
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei (x_n) eine Folge im X und sei $x \in X$. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine Teilfolge, die gegen x konvergiert, wenn es zu jeder offenen Kugel U von x unendlich viele Indizes n gibt, so dass $x_n \in U$.

(b) Sei $K \subset X$ kompakt. Zeigen Sie: Jede Folge (x_n) in K hat eine konvergente Teilfolge mit Limes in K.