Analysis II, Übungsblatt Nr. 12 (Bonus)

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 16.07.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fourierreihe der periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = |\sin x| \text{ für } 0 \le x \le 2\pi.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

(a)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 y \sin(xy) dx dy.$$

(b)
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}} dx dy.$$

Aufgabe 4

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (t^3, t^2 + t, t)$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma F$ für die folgenden Vektorfelder F auf $\mathbb{R}^3$:

(a) $F(x,y,z) = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2yz, y^2)$.

(b) $F(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x+z)$.

Hinweis. Versuchen Sie zunächst ein Potential zu finden.

Aufgabe 5

Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1) \cup (0,-1)\}$. Geben Sie ein rotationsfreies Vektorfeld F auf U an, das nicht konservativ ist, und das

$$\int_\gamma F = 0$$

erfüllt mit $\gamma : [0, 2\pi] \to U$, $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$. Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 6

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Beweisen Sie die Eindeutigkeitsaussage im Banachschen Fixpunktsatz.

(c) Beweisen Sie die Existenzsaussage im Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 7

Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert eine Konstante $c \in (0,1)$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $\|DF(x)\| \le c$, wobei

$$\|DF(x)\| := \sup_{y \in \mathbb{R}^d : \|y\|=1} \|DF(x)(y)\|.$$

Wir definieren auch

$$\|DF\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|DF(x)\|.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt
$$\|F(x) - F(y)\| \le \|DF\|_\infty \|x - y\|.$$

(b) Die Funktion $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $G(x) := x + F(x)$ ist surjektiv. Hinweis: Fixpunktsatz von Banach.

Aufgabe 8

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und

$$K := \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \le f(x)^2\}.$$

Zeigen Sie:

$$\mathrm{vol}(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Aufgabe 9

Sei A eine Matrix in $\mathbb{R}^{d \times d}$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt $u \in \mathbb{R}^d$ mit $\|u\| = 1$, so dass
$$\|Au\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^d : \|v\|=1} \|Av\|.$$

(b) Sei u wie in (a). Beweisen Sie: Ist u' orthogonal zu u, so ist Au' orthogonal zu Au.

Hinweis: Betrachten Sie $u + \lambda u'$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ im Hinblick auf die Maximalitätseigenschaft von u.

(c) Beweisen Sie: Es gibt zwei orthogonale Matrizen U, V so dass $AU = V\Lambda$ für eine diagonale Matrix Λ.

Aufgabe 10

(a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ α-Hölder stetig mit $0 < \alpha < 1$, d.h.
$$\exists C \in \mathbb{R} \forall x, y \in [0,1] : |f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$$
Sei $p = 1/\alpha$. Zeigen Sie
$$\|f\|_{V^p} := \sup_{N, 0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_N \le 1} \left(\sum_{n=1}^N |f(t_n) - f(t_{n-1})|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

(b) Zeigen Sie die folgende Umkehrung: Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit
$$\|f\|_{V^p} = 1,$$
so existiert eine monotone Abbildung $\phi : [0,1] \to [0,1]$ und eine α-Hölder stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $f = g \circ \phi$, wobei p, α wie im Aufgabenteil (a) sind. Hinweis: Ein ähnliches ϕ wurde in der Vorlesung konstruiert.