Analysis II, Übungsblatt Nr. 11

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 13.07.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Gradientenfelder)
Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, zusammenhängende Menge. Sei $F : U \to \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Sind $\gamma : [a,b] \to U$, $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to U$ zwei C^1 Kurven mit $\gamma(a) = \widetilde{\gamma}(a)$ und $\gamma(b) = \widetilde{\gamma}(b)$, dann

$$\int_\gamma F = \int_{\widetilde{\gamma}} F.$$

(ii) Ist $\gamma : [a,b] \to U$ eine geschlossene C^1 Kurve, dann $\int_\gamma F = 0$.

Aufgabe 2 (Rektifizierbarkeit)
Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar* mit der Länge L, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$$

der Feinheit $< \delta$ gilt

$$\Big| \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| - L \Big| < \epsilon.$$

Zeigen Sie, dass jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar ist, und dass für ihre Länge L

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

gilt.

Aufgabe 3 (Logarithmische Spirale)
Sei $\alpha > 0$ und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve definiert durch

$$\gamma(t) := (e^{\alpha t} \cos t, e^{\alpha t} \sin t).$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve γ für $\alpha = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

(b) Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ berechnen Sie die Bogenlänge $L_{a,b}$ der Kurve $\gamma\,|_{[a,b]}$.

(c) Existiert $\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}$?

(d) Zeigen Sie, dass die Kurve γ jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechnen Sie den Cosinus des Schnittwinkels.

Aufgabe 4 (Zylinder II)

Sei $r > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Durchschnitts der drei Zylinder

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2\},$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq r^2\},$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + x^2 \leq r^2\}.$$