Analysis 1, Übungsblatt Nr. 8

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 04.12.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Folgen)

Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Folgen konvergieren.

(a) Seien $q \in \mathbb{X}$ mit $0 < q < 1$ und $a_n := \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k}} q^k$.

(b) Seien $a_0 = 0, a_1 = 1$ und $a_{n+2} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$.

(c) Seien $a_0, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b$ und $0 < a_0 < \frac{1}{b}$ und $a_{n+1} := 2a_n - ba_n^2$.

Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 2 (Arithmetisches Mittel)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen und sei

$$a_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

die Folge der entsprechenden arithmetischen Mittel.

(a) Zeigen Sie:

$$\limsup_{n \to \infty} a_n \leq \limsup_{n \to \infty} x_n,$$
$$\liminf_{n \to \infty} x_n \leq \liminf_{n \to \infty} a_n.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Folgern Sie:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} a_n = x.$$

Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Cauchy Produkt)
Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ für $n > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge a summierbar aber nicht absolut summierbar ist.

(b) Die *Cauchy Produkt* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit sich selbst ist per Definition die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, wobei

$$c_n := a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_1.$$

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergiert.

Aufgabe 4 (Konvergente Reihe)
Sei

$$\mathcal{M} := \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, \ldots\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen $n \geq 1$, die durch keine Primzahl $\neq 2, 5$ teilbar sind. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{1}{n} < \infty.$$

Können Sie den Wert dieser Reihe bestimmen?