Analysis 1, Übungsblatt Nr. 6

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

universitätbonn

Abgabe in der Vorlesung am 20.11.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Cauchykriterium für eigentlich konvergente Folge)
Beweisen Sie mit den Methoden des Skriptes vor Satz 3.7:
Eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ ist eigentlich konvergent genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n, m' \geq n : f(m) < f(m') + \epsilon \wedge f(m') < f(m) + \epsilon.$$

Aufgabe 2 (Reihen, Quotienten und Ungleichungen)
Seien $x, y \in \mathbb{X}$, so dass $x < 1$ und $y < 1$, und seien $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{X} \setminus \{\infty\}$ zwei Folgen.

(a) Zeigen Sie:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(b) Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq y$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

(c) Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < \infty$, und dass die folgende Ungleichung gilt:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\Big)^{1/2}.$$

(d) Folgern Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ auch die Konvergenz gegen einen endlichen Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ impliziert.
Hinweise. Berechnen Sie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Aufgabe 3 ($\alpha-$Test)
Sei $\alpha \in \mathbb{X} \setminus \{\infty\}$. Für jede $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir $L(n) := \max\{k \in \mathbb{N} : 2^k \leq n\}$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt
$$2^{L(n)} \leq n < 2^{L(n)+1}.$$

(b) Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, berechnen Sie:
$$(i) \sum_{n=1}^{2^k-1} \Big(\frac{1}{2^{L(n)}}\Big)^{\alpha}, \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{L(n)}}\Big)^{\alpha}.$$

(c) Für welche Werte von $0 \leq \alpha < \infty$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty?$$

Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 4 (Quasi Stirling-Formel)

Zeigen Sie:

(a) Die Folge $\alpha_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend und die Folge $\beta_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend.

(b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} &= \frac{n^n}{n!},\\
\left(1+\frac{1}{1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{3}\right)^4 \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} &= \frac{n^n}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

(d) Sei $e := \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. (Nach Teil (b) folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \beta_n = e$.) Es gelten die Ungleichungen

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Diese bessere Approximation für $n!$ soll mit Aufgabe 2 aus Übungsblatt 3 verglichen werden.