Analysis 1, Übungsblatt Nr. 5

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 13.11.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Fibonacci Zahlen)

Es sei $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$. Wir definieren

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \ \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die folgenden Identitäten gelten:

(a)
$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

(b)
$$F_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$$

(c)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$$

(d)
$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

Fibonacci hat diese Folge betrachtet, um das Wachstum einer Kaninchenpopulation zu beschreiben.

Aufgabe 2 (Ordnung auf $\mathbb{X}$)

Wie in der Vorlesung nennen wir $\mathbb{X}$ die Menge der erweiterten nichtnegativen reellen Zahlen. Beweisen Sie Satz 2.17 (1)(3) und Satz 2.22 mit den Methoden des Skripts, die bis dann verfügbar sind:

Für $x, y, z \in \mathbb{X}$ gelten:

(a) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(b) $x \leq y \vee y \leq x$

(c) Es existiert $w \in \mathbb{X}$, so dass $w + w = x + y$.

Aufgabe 3 (Dyadische Intervalle)

Für $k, n \in \mathbb{N}$ heißt

$$I_{k,n} = \left\{ x \in \mathbb{X} : \frac{n}{2^k} \leq x < \frac{n+1}{2^k} \right\}$$

ein dyadisches Intervall. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in \mathbb{X}$, $x \neq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in I_{k,n}$.

(b) Zwei dyadische Intervalle sind entweder disjunkt oder ineinander enthalten.

Aufgabe 4 (Isoperimetrische Ungleichung für den 3-Würfel)

Beweisen Sie:

Unter allen Quadern deren Oberfläche einen gegebenen Flächeninhalt A hat, besitzt der Würfel das größte Volumen.

Bemerkung. Sie können annehmen, dass alle Kanten des Quaders *positive* Längen $a, b, c > 0$ haben. Insbesondere gilt $A = 2(ab + bc + ca)$.

Information von der Fachschaft Mathematik: Am 18.11 um 18 Uhr findet im großen Hörsaal eine Vollversammlung aller Mathematikstudierenden statt, organisiert durch die Fachschaft Mathematik. Zentrale Themen werden sein: Interimsmensa, Verbesserung der Prüfungsordnung und Orts-NC. Nähere Informationen findet ihr in den Glaskästen im Nebengebäude sowie auf `fsmath.uni-bonn.de`. Erscheint zahlreich!