Analysis 1, Übungsblatt Nr. 14

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Freiwillige Abgabe in der Vorlesung am 05.02.2015.
Pro Aufgabe sind 10 **Bonuspunkte** erreichbar.

Aufgabe 1 (Integration)
Seien $a, b \in (0, \infty)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

mithilfe eines angemessenen Integrales.

Aufgabe 2 (Partialbruchzerlegung)
Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{1}{x^4+1} dx.$$

Aufgabe 3 (Stirlingsche Formel, 1. Teil)
Nehmen Sie an, dass

$$L := \lim_{n \to \infty} \frac{n! e^n}{\sqrt{n} n^n}$$

existiert und positiv ist. Zeigen Sie: $L = \sqrt{2\pi}$. *Hinweis.* Wallissches Integral.

Aufgabe 4 (Gaußsches Integral)

(a) Beweisen Sie:

$$(a_1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in (0,\infty): \quad t \leq n \Rightarrow \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t};$$

$$(a_2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in (0,\infty): \quad e^{-t} \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n}.$$

(b) Berechnen Sie:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aufgabe 5 (Leibniz'sche Reihe)

Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \text{ für } 0 < x < 2\pi.$$

Beweisen Sie damit die Formel

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots \tag{1}$$

Aufgabe 6 (Leibniz'sche Reihe II)

Zeigen Sie:

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} r^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Geben Sie einen zweiten Beweis für die Formel (1) der Leibniz'schen Reihe.