Analysis 1, Übungsblatt Nr. 12

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

universitätbonn

Abgabe in der Vorlesung am 22.01.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 5i| < 4\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z^2) < 0\}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : z^3 + z^2 + 9z + 9 = 0\}.$$

(b) Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$.
Zeigen Sie: Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ besitzt genau dann die Eigenschaft $|z| \leq 1$, wenn $|z - w| \leq |1 - \overline{w}z|$.

Aufgabe 2 (Euler-Mascheroni)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

wobei $\lfloor y \rfloor$ der ganzzahlige Teil von $y \in \mathbb{R}$ ist (d.h. die größte ganze Zahl kleinergleich y).
Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\epsilon \searrow 0^+} \int_\epsilon^1 f(x)dx$$

existiert, und untersuchen Sie den Wert dieses Limes.

Aufgabe 3 (Uneigentliche Integrale)

(1. Art) *Eine Integrationsgrenze ist unendlich.* Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a, R]$, $a < R < \infty$, integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)dx$$

existiert und endlich ist, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)dx.$$

(2. Art) *Der Integrand ist an einer Integrationsgrenze nicht definiert.* Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Teilintervall $[a + \epsilon, b]$, $0 < \epsilon < b - a$, integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \searrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

existiert und endlich ist, heißt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \searrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

(a) Für welche Werte von $s \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$$

gegen einen endlichen Wert?

(b) Für welche Werte von $s \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$$

gegen einen endlichen Wert?

Begründen Sie Ihre Behauptungen, und berechnen Sie die konvergente Integrale!

Aufgabe 4 (Gamma-Funktion)

Für reelle $x > 0$ ist die Gamma-Funktion definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ dieses uneigentliche Integral konvergent ist, d.h. dass $\Gamma(x)$ wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und dass

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1), \text{ für alle } x > 0.$$

(c) Zeigen Sie, dass Γ *logarithmisch konvex* ist, d.h. dass die Funktion $\ln \Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ konvex ist.