Analysis 1, Übungsblatt Nr. 11

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 15.01.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen)

(a) Bestimmen Sie Betrag, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen

$$(a_1)\ \frac{1+2i}{3-4i} \qquad (a_2)\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2015} \qquad (a_3)\ \sqrt{i} \qquad (a_4)\ \cos(i).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$

$$|1-\overline{\zeta}\eta|^2 - |\zeta-\eta|^2 = (1-|\zeta|^2)(1-|\eta|^2).$$

(c) Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichungen

$$(c_1)\ z^4 - 2z^2 + 4 = 0 \qquad (c_2)\ e^z = i.$$

Aufgabe 2 (Potenzreihen)

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius:

$$a_n = 3^{\frac{n}{2}} \exp(-n), \quad a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad a_n = \frac{n^3 \sin n}{3^n}, \quad a_n = n\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}.$$

(b) Die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ seien r_a bzw. r_b. Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) x^n$ einen Konvergenzradius r mit

$$r \geq r_a \cdot r_b$$

hat.

Aufgabe 3 (Partielle Integration)

(a) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei reell analytische Funktionen. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

(b) Berechnen Sie:

(b_1) Für $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx.$$

(b_2) Für $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx.$$

Aufgabe 4 (Mittelwertsatz und eine Verallgemeinerung)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall (a, b) stetig differenzierbar. Weiter sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

(a) Zeigen Sie: es existiert ein $x_1 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1).$$

(b) Zeigen Sie: dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es existiert ein $x_2 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}.$$