Analysis 1, Übungsblatt Nr. 10

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 18.12.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Stetigkeit)

(a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Y} \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Y}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f genau in $x = 0$ stetig ist (insbesondere nirgends sonst). Skizzieren Sie außerdem diese Funktion.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b]) \subset [a,b]$. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt in $[a,b]$ hat, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Aufgabe 2 (Differenzierbarkeit)

Seien $f_1, f_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad \text{und } f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f_1 in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass f_2 in $x = 0$ differenzierbar ist.

(c) Bestimmen Sie f_2' für $x \in (-1,1)$.

Aufgabe 3 (Eine differentielle Ungleichung)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) > f(x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

und sei $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert $x > x_0$ so dass $f(x) > 0$.

(b) Für alle $x > x_0$ gilt $f(x) > 0$.

Aufgabe 4 (Reihen)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k \geq 0$ eine monoton fallende Folge.

(a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn die verdichtete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

(b) Gilt die Aussage aus Teil (a) immer noch, wenn stattdessen die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 10^k a_{10^k}$ betrachtet wird?

(c) Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Dezimalstellen von $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nd(n)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nd(n)d(d(n))}, \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nd(n)d(d(n))d(d(d(n)))}$$

divergieren.