Polinómio característico: $\det(A - \lambda I)$

Valores próprios (de uma matriz): λ tais que $\det(A - \lambda I) = 0$

Vectores próprios (de uma matriz) associados a um valor próprio λ: $v \in \mathcal{N}(A - \lambda I) \setminus \{\mathbf{0}\}$

$\mathcal{N}(A - \lambda I)$ é o **subespaço próprio** associado ao valor próprio λ

Multiplicidade algébrica de um valor próprio λ: $m_a(\lambda) = n^o$ de vezes que esse λ se repete em $\det(A - \lambda I)$

Multiplicidade geométrica de um valor próprio λ: $m_g(\lambda) = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Matrizes (A e B) **semelhantes:** $B = SAS^{-1}$

Matriz A **diagonalizável:** $D = PAP^{-1}$

$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

Valores próprios e **vectores próprios** de uma transformação linear

Transformações lineares **diagonalizáveis**

Projecções

Definição. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. A e B dizem-se **semelhantes** se e só se existir S invertível tal que

$$B = SAS^{-1}$$

Observação. Duas matrizes são semelhantes **se e só se** existirem bases em relação às quais essas matrizes representem a mesma transformação linear.

Teorema.

$A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Se A e B forem semelhantes **então** A e B têm o(a) mesmo(a)**:**

(i) determinante;

(ii) característica;

(iii) nulidade;

(iv) traço;

(v) polinómio característico, e os mesmos valores próprios.

Definição.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Se existirem matrizes P^{-1} **invertível** e D **diagonal** tais que

$$D = PAP^{-1}$$

então A é diz-se **diagonalizável**.

Observação.

Se A fôr uma matriz diagonal então $P^{-1} = I$.

Observação. Se

$$D = PAP^{-1}$$

com D matriz diagonal, **então**, para $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k = PA^kP^{-1} \Leftrightarrow A^k = P^{-1}D^kP$$

Observação.

Se $P^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \ldots & v_n \end{array} \right]$ e $D = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{array} \right]$

então

$$D = PAP^{-1} \Leftrightarrow AP^{-1} = P^{-1}D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ \cdots \\ Av_n = \lambda_n v_n \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (v_i \in \mathcal{N}(A - \lambda_i I) \setminus \{\mathbf{0}\} \quad i = 1, ..., n$ e

λ_i é tal que $\det(A - \lambda_i I) = 0)$

Definição.

λ é **valor próprio** de $A \Leftrightarrow \lambda$ satisfaz: $\det(A-\lambda I) = 0$

Definição.

Polinómio característico de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$: $\det(A-\lambda I)$

Definição.

$m_a(\lambda)$ = **multiplicidade algébrica** de λ, é a multiplicidade de λ como raíz de $\det(A-\lambda I)$.

Definição.

v é **vector próprio** de A, associado ao valor próprio λ de A, $\Leftrightarrow v \in \mathcal{N}(A-\lambda I)\setminus\{\mathbf{0}\}$

Definição. $\mathcal{N}(A-\lambda I)$ é o **subespaço próprio** associado ao valor próprio λ

Definição. $\dim \mathcal{N}(A-\lambda I) = m_g(\lambda)$ é a **multiplicidade geométrica** de λ

Exemplo. Uma matriz com valores próprios repetidos e não diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Valores próprios de A: 1.

$$\mathcal{N}\left(A - I\right) = L\left(\{(1,0)\}\right)$$

$$m_g\left(1\right) = \dim \mathcal{N}\left(A - I\right) = 1 < 2 = m_a\left(1\right)$$

Como $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{N}\left(A - I\right)$ **então** não existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada só por vectores próprios de A. Logo, a matriz A não é diagonalizável, isto é, não existe P^{-1} tal que $PAP^{-1} = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo. Uma matriz com valores próprios repetidos e não diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$$

Valores próprios de A: 3 e 2.

$$\mathcal{N}(A - 3I) = L(\{(1,2,1)\}) \qquad 1 = m_g(3) < m_a(3) = 2$$

$$\mathcal{N}(A - 2I) = L(\{(0,1,0)\}) \qquad m_g(2) = m_a(2) = 1$$

como

$$\mathbb{R}^3 \neq \mathcal{N}(A - 3I) \oplus \mathcal{N}(A - 2I)$$

então não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Logo, a matriz A não é diagonalizável, isto é, não existe P^{-1} tal que $PAP^{-1} = D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Polinómio característico de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$:

$$\det(A - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$$

Tem grau n.

$\lambda_1, ..., \lambda_k$ valores próprios distintos de A

$m_1, ..., m_k$ **multiplicidades algébricas**

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

Para todo o valor próprio λ de A

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Teorema. Para todo o valor próprio λ de A

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Dem. Seja λ um qualquer valor próprio de A.

Seja $r = m_g(\lambda) = \mathbf{dim}\,\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

Seja $\{u_1, ..., u_r\}$ uma base de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

Seja $\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$).

Seja $S^{-1} = [u_1 ... u_r u_{r+1} ... u_n]$. Tem-se

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda I_{r \times r} & * \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & ** \end{bmatrix}.$$

Logo, como SAS^{-1} e A têm o mesmo polinómio característico, então λ é uma raíz do polinómio característico de A com multiplicidade algébrica pelo menos igual a r.

Teorema. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Se A tiver valores próprios distintos $\lambda_1, ..., \lambda_k$ e

se $v_1, ..., v_k$ forem os vectores próprios associados a cada um destes valores próprios,

então os vectores $v_1, ..., v_k$ são **linearmente independentes.**

Teorema. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável **se e só se** existir uma base $\mathcal{B}_{vp}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A.

Na diagonal principal de D estarão os valores próprios de A pela ordem dos vectores próprios correspondentes na base $\mathcal{B}_{vp}$.

P^{-1} será a matriz cujas colunas são os vectores próprios de A, da base $\mathcal{B}_{vp}$ de $\mathbb{R}^n$ pela mesma ordem, tendo-se (analogamente em $\mathbb{C}^n$)

$$D = PAP^{-1}$$

Teorema. $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ $\quad \lambda_1, ..., \lambda_k$ valores próprios distintos de A

Então são equivalentes:

(i) A é diagonalizável.

(ii) A tem n vectores próprios linearmente independentes.

(iii) $\sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = n$

(iv) $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ para todo o $i = 1, ..., k$.

Teorema. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então

A é diagonalizável $\;\Leftrightarrow$

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) \oplus ... \oplus \mathcal{N}(A - \lambda_k I)$$

Exemplo. Todos os valores próprios distintos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (2-\lambda)(3-\lambda)$$

Valores próprios de A: 3 e 2.

$$\mathcal{N}(A - 3I) = L(\{(1,1)\}) \qquad m_g(3) = m_a(3) = 1$$

$$\mathcal{N}(A - 2I) = L(\{(2,1)\}) \qquad m_g(2) = m_a(2) = 1$$

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(A - 3I) \oplus \mathcal{N}(A - 2I)$

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(-1,0,1), (1,-1,1), (1,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A. Logo A é diagonalizável, isto é, existe P^{-1} tal que $PAP^{-1} = D$ com:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2-\underbrace{5}_{\operatorname{tr}A}\lambda+\underbrace{6}_{\det A}=\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\,\lambda+\det A$$

Por outro lado $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda_1-\lambda)\,(\lambda_2-\lambda)$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\,\lambda+ad-bc=$$

$$=\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\,\lambda+\det A$$

$$(\lambda_1-\lambda)\,(\lambda_2-\lambda)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\,\lambda+\lambda_1\lambda_2$$

Logo

$$\operatorname{tr}A=\lambda_1+\lambda_2 \qquad \text{e} \qquad \det A=\lambda_1\lambda_2$$

Polinómio característico de A: $\det(A-\lambda I) =$

$$= \det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda_1-\lambda)^{m_1}(\lambda_2-\lambda)^{m_2}\cdots(\lambda_k-\lambda)^{m_k}$$

O coeficiente do termo de grau n é $(-1)^n$

O coeficiente do termo de grau $n-1$ é $(-1)^{n-1}\operatorname{tr} A$

O termo constante é: $\det(A-0I) = \det A$

0 é um valor próprio de $A \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A$ **não** é invertível

Teorema. Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os valores próprios de A (repetidos de acordo com a respectiva multiplicidade algébrica). **Então**

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \qquad \operatorname{tr} A = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.$$

Definição. $T : V \to V$ linear. λ é um **valor próprio** de T se e só se existir $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que

$$T(v) = \lambda v$$

a esses vectores não nulos v chamam-se **vectores próprios** associados ao valor próprio λ.

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

é o **subespaço próprio** associado ao valor próprio λ e

$$\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) = m_g(\lambda)$$

é a **multiplicidade geométrica** de λ.

Teorema. $T : V \to V$ linear.

$$\lambda \text{ é um valor próprio de } T \Leftrightarrow \mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$$

Teorema. Se $A = M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ então

$\{$valores próprios de $T\} = \{$valores próprios de $A\}$

Os vectores de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ são as coordenadas dos vectores de $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ em $\mathcal{B}$.

$$m_g(\lambda) = \dim \mathcal{N}(T - \lambda I) = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I).$$

Observação. Se $V = \mathbb{R}^n$ e $A = M(T; \mathcal{B}_c^n; \mathcal{B}_c^n)$ então

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(A - \lambda I)$$

$$\{\text{valores próprios de } T\} = \{\text{valores próprios de } A\}$$

$$\{\text{vectores próprios de } T\} = \{\text{vectores próprios de } A\}$$

Definição. $T : V \to V$ linear. T **é diagonalizável** se e só se existir uma base (ordenada) $\mathcal{B}$ de V em relação à qual a matriz $M\left(T;\mathcal{B};\mathcal{B}\right)$ seja uma matriz diagonal D.

Nesse caso tem-se $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{vp}$ de T

Observação. Se $A = M\left(T,\mathcal{B},\mathcal{B}\right)$ e se existir $\mathcal{B}_{vp}$ de T **então**

$$D = M\left(T,\mathcal{B}_{vp},\mathcal{B}_{vp}\right) = PAP^{-1},$$

com

$$P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}}$$

Observação. Se $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_c^n$ então

$$P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_c^n}$$

Definição. $T : V \to V$ linear diz-se **projecção** se e só se $T \circ T = T \quad (T^2 = T)$

Teorema.

T projecção $\Rightarrow V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{I}(T)$

T projecção $\Rightarrow \mathcal{I}(T) = \mathcal{N}(T - I)$

T projecção $\Rightarrow V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T - I)$

T projecção $\Rightarrow$ os valores próprios de T são 0 e 1

T projecção e $\dim V < \infty \Rightarrow T$ é diagonalizável

Os valores próprios de T são 0 e $1 \not\Rightarrow T$ projecção

Definição. Considerando um produto interno,

$T : V \to V$ linear dir-se-á **projecção ortogonal** se e só se

$$T \circ T = T \qquad (T^2 = T) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{N}(T) = (\mathcal{I}(T))^{\perp}$$

Exemplo. Todos os valores próprios distintos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)$$

Valores próprios de A: 0, 1 e 2.

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(-1,0,1)\}) \qquad m_g(0) = m_a(0) = 1$$

$$\mathcal{N}(A-I) = L(\{(1,-1,1)\}) \;\; m_g(1) = m_a(1) = 1$$

$$\mathcal{N}(A-2I) = L(\{(1,0,1)\}) \;\; m_g(2) = m_a(2) = 1$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(A-I) \oplus \mathcal{N}(A-3I) \oplus \mathcal{N}(A)$$

$\mathcal{B}_{vp} = \{(-1,0,1), (1,-1,1), (1,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.Logo A é diagonalizável, isto é, existe P^{-1} tal que $PAP^{-1} = D$ com:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo. Valores próprios repetidos mas diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = (1-\lambda)^2 (3-\lambda)$$

Os valores próprios de A são 1 e 3.

$$\mathcal{N}(A-I) = L(\{(0,1,0),(-1,0,1)\}) \quad m_g(1) = m_a(1) = 2$$

$$\mathcal{N}(A-3I) = L(\{(1,0,1)\}) \quad \text{logo} \quad m_g(3) = m_a(3) = 1$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(A-I) \oplus \mathcal{N}(A-3I)$$

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(0,1,0),(-1,0,1),(1,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ de vectores próprios de A. Logo A é diagonalizável, existe P^{-1} tal que $PAP^{-1} = D$ com:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo. Uma matriz com apenas um valor próprio real não diagonalizável em $\mathbb{R}$ mas diagonalizável em $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)\left(1 + \lambda^2\right)$$

Valores próprios de A: 1, i e $-i$.

Logo, a matriz A não é diagonalizável em $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. No entanto, como os três valores próprios são distintos, A é diagonalizável numa matriz de entradas complexas:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} = PAP^{-1} \quad \text{com} \quad P^{-1} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

Exemplo. A sucessão de Fibonacci (Leonardo de Pisa, 1202). Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad v_{n+2} = v_n + v_{n+1}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_{n+1} \\ v_{n+2} = v_n + v_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Valores próprios de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$\mathcal{N} \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} = L\left(\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)\right\}\right)$$

$$\mathcal{N} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} = L\left(\left\{\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)\right\}\right)$$

Como existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por só por vectores próprios então $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(P^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} P \right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \end{bmatrix}.$$

Exemplo. $u'(t) - au(t) = \mathbf{0} \underset{u(t)\neq 0}{\Leftrightarrow} u(t) = ke^{at}$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = -2u_1(t) \\ u_2'(t) = 3u_2(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = k_1 e^{-2t} \\ u_2(t) = k_2 e^{3t} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$*\left\{\begin{array}{l} u_1'(t) = -u_1(t) + 2u_2(t) \\ u_2'(t) = 2u_1(t) + 2u_2(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{array}\right] = P^{-1}DP \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P \left[\begin{array}{c} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{array}\right] = DP \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right]$$

Seja $\left[\begin{array}{c} w_1(t) \\ w_2(t) \end{array}\right] = P \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right]$

$$\left(\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right] = P^{-1} \left[\begin{array}{c} w_1(t) \\ w_2(t) \end{array}\right]\right)$$

$$\left[\begin{array}{c} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{array}\right] = D \left[\begin{array}{c} w_1(t) \\ w_2(t) \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \Leftrightarrow$$

Mas $\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + k_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

é a solução do sistema de equações diferenciais inicial *

Neste caso:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= PDP^{-1}$$