Polinómio característico: $\det(A - \lambda I)$

Valores próprios (de uma matriz): λ tais que $\det(A - \lambda I) = 0$

Vectores próprios (de uma matriz) associados a um valor próprio λ: $v \in \mathcal{N}(A - \lambda I) \setminus \{\mathbf{0}\}$

$\mathcal{N}(A - \lambda I)$ é o **subespaço próprio** associado ao valor próprio λ

Multiplicidade algébrica de um valor próprio λ: $m_a(\lambda) = n^o$ de vezes que esse λ se repete em $\det(A - \lambda I)$

Multiplicidade geométrica de um valor próprio λ: $m_g(\lambda) = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Matrizes (A e B) **semelhantes:** $B = SAS^{-1}$

Matrizes **diagonalizáveis:** $D = PAP^{-1}$

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$u'(t) - au(t) = \mathbf{0} \underset{u(t)\neq 0}{\Leftrightarrow} u(t) = ke^{at}$$

$$\begin{cases} u_1'(t) = 2u_1(t) \\ u_2'(t) = 3u_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(t) = c_1 e^{2t} \\ u_2(t) = c_2 e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$\begin{cases} u_1'(t) = -u_1(t) + 2u_2(t) \\ u_2'(t) = 2u_1(t) + 2u_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = P^{-1}DP \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = DP \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Seja $\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$

$$\left(\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \Leftrightarrow$$

Mas $\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

é a solução do sistema de equações diferenciais inicial.

Neste caso:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= PDP^{-1}$$

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Se existir P^{-1} invertível:

$$D = PAP^{-1}$$

com D **matriz diagonal**, então A é **diagonalizável** e P^{-1} é a **matriz diagonalizante**.

Se A fôr uma matriz diagonal, a matriz diagonalizante é a matriz identidade.

Se

$$D = PAP^{-1}$$

com D matriz diagonal, **então**, para $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k = PA^kP^{-1} \Leftrightarrow A^k = P^{-1}D^kP$$

Se $P^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

então

$$D = PAP^{-1} \Leftrightarrow AP^{-1} = P^{-1}D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ \quad \cdots \\ Av_n = \lambda_n v_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (v_i \in \mathcal{N}(A - \lambda_i I) \setminus \{\mathbf{0}\} \quad i = \mathbf{1}, ..., n$ e

λ_i é tal que $\det(A - \lambda_i I) = 0)$

λ é **valor próprio** de $A \Leftrightarrow \lambda$ satisfaz: $\det(A - \lambda I) = 0$

$m_a(\lambda) =$ **multiplicidade algébrica** de λ, é a multiplicidade de λ como raíz de $\det(A - \lambda I)$.

v é **vector próprio** de A, associado ao valor próprio λ de A, $\Leftrightarrow$

$$v \in \mathcal{N}(A - \lambda I) \setminus \{\mathbf{0}\}$$

$\mathcal{N}(A - \lambda I)$ é o **subespaço próprio** associado ao valor próprio λ

$\dim \mathcal{N}(A - \lambda I) = m_g(\lambda)$ é a **multiplicidade geométrica** de λ

Polinómio característico de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

$$p(\lambda) = \mathsf{det}(A - \lambda I)$$

Tem grau n

O coeficiente do termo de grau n é $(-1)^n$

O coeficiente do termo de grau $n-1$ é $(-1)^{n-1}\,\mathsf{tr}\,A$

O termo constante é $p(0) = \mathsf{det}\,A$

$$p(0) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{det}\,A = \mathsf{det}(A - 0I) = 0$$

0 é um valor próprio de $A \Leftrightarrow A$ **não** é invertível

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$$

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, ..., \lambda_k$ valores próprios distintos de A

$m_1, ..., m_k$ **multiplicidades algébricas**

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os valores próprios de A (repetidos de acordo com a respectiva multiplicidade algébrica). **Então**

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

$A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ A e B são **semelhantes** se existir S invertível tal que

$$B = SAS^{-1}$$

Duas matrizes são semelhantes **se e só se** existirem bases em relação às quais essas matrizes representem a mesma transformação linear.

$A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$

Se A e B forem semelhantes **então** A e B têm o(a) mesmo(a)**:**

(i) determinante;

(ii) característica;

(iii) nulidade;

(iv) traço;

(v) polinómio característico, e os mesmos valores próprios.

Para todo o valor próprio λ de A

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Dem. Seja λ um qualquer valor próprio de A.

Seja $r = m_g(\lambda) = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$.

Seja $\{u_1, ..., u_r\}$ uma base de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

Seja $\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$).

Seja $S^{-1} = [u_1 ... u_r u_{r+1} ... u_n]$. Tem-se

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda I_{r\times r} & * \\ \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & ** \end{bmatrix}.$$

Logo, como SAS^{-1} e A têm o mesmo polinómio característico, então λ é uma raíz do polinómio característico de A com multiplicidade algébrica pelo menos igual a r.

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Se A tiver valores próprios distintos $\lambda_1, ..., \lambda_k$ e

se $v_1, ..., v_k$ forem os vectores próprios associados a cada um destes valores próprios,

então os vectores $v_1, ..., v_k$ são **linearmente independentes.**

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável **se e só se** existir uma base $\mathcal{B}_{vp}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores próprios de A.

Na diagonal principal de D estarão os valores próprios de A pela ordem dos vectores próprios correspondentes na base $\mathcal{B}_{vp}$.

P^{-1} será a matriz cujas colunas são os vectores próprios de A, da base $\mathcal{B}_{vp}$ de $\mathbb{R}^n$ pela mesma ordem, tendo-se (analogamente em $\mathbb{C}^n$)

$$D = PAP^{-1}$$

$A \in \mathcal{M}_{n\times n} \quad \lambda_1, ..., \lambda_k$ valores próprios distintos de A

Então são equivalentes:

(i) A é diagonalizável.

(ii) A tem n vectores próprios linearmente independentes.

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = n$

(iv) $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ para todo o $i = 1, ..., k$.

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então

A é diagonalizável $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) \oplus ... \oplus \mathcal{N}(A - \lambda_k I)$$

Uma matriz com valores próprios distintos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 2)$$

Valores próprios de A: 0, 1, 2. Os vectores próprios associados ao valor próprio λ são os vectores não nulos de $\mathcal{N}\,(A - \lambda I)$.

$\mathcal{N}\,(A) = L\,(\{(-1, 0, 1)\})$ logo $m_g\,(0) = m_a\,(0) = 1$

$\mathcal{N}\,(A - I) = L\,(\{(1, -1, 1)\})$ logo $m_g\,(1) = m_a\,(1) = 1$

$\mathcal{N}\,(A - 2I) = L\,(\{(1, 0, 1)\})$ logo $m_g\,(2) = m_a\,(2) = 1$

$$\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1)\,, (1, -1, 1)\,, (1, 0, 1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.Logo A é diagonalizável, isto é, existe P invertível tal que $PAP^{-1} = D$ é uma matriz diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz com valores próprios repetidos mas diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$$

Os valores próprios de A são 1 e 3.

$\mathcal{N}(A - I) = L(\{(0,1,0), (-1,0,1)\}) \quad m_g(1) = m_a(1) = 2$

$\mathcal{N}(A - 3I) = L(\{(1,0,1)\}) \quad$ logo $\quad m_g(3) = m_a(3) = 1$

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(A - I) \oplus \mathcal{N}(A - 3I)$

$$\mathcal{B} = \{(0,1,0), (-1,0,1), (1,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ de vectores próprios de A. Logo A é diagonalizável, existe P invertível tal que $PAP^{-1} = D$ é uma matriz diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz com valores próprios repetidos e não diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 3)^2 (\lambda - 2)$$

Valores próprios de A: 3 e 2.

$\mathcal{N}(A - 3I) = L(\{(1, 2, 1)\})$ logo $1 = m_g(3) < m_a(3) = 2$

$\mathcal{N}(A - 2I) = L(\{(0, 1, 0)\})$ logo $m_g(2) = m_a(2) = 1$

como

$$\mathbb{R}^3 \neq \mathcal{N}(A - 3I) \oplus \mathcal{N}(A - 2I)$$

então não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Logo, a matriz A não é diagonalizável, isto é, não existe P invertível tal que PAP^{-1} seja diagonal.

Uma matriz com apenas um valor próprio real.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)\left(\lambda^2 + 1\right)$$

Valores próprios de A: $\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = i, \;\; \lambda_3 = -i$.

Logo, a matriz A não é diagonalizável em $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. No entanto, como os três valores próprios são distintos, A é diagonalizável numa matriz de entradas complexas:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Exemplo. A sucessão de Fibonacci (Leonardo de Pisa, 1202). Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1 \quad \text{e} \quad v_{n+2} = v_n + v_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_{n+1} \\ v_{n+2} = v_n + v_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Valores próprios de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$\mathcal{N}\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} = L\left(\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)\right\}\right)$$

$$\mathcal{N}\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} = L\left(\left\{\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)\right\}\right)$$

Como existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por só por vectores próprios então $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(P^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} P \right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \end{bmatrix}.$$