Matriz de mudança de coordenadas: $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$

(como se faz e para que serve)

Transformação linear

A **matriz** de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$:
$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}')$

(como se faz e para que serve)

As **3** formas (equivalentes) de definir uma transformação linear

Operações com transformações lineares: αT, $T_1 + T_2$, $T_1 \circ T_2$ e T^{-1} (se existir)

A **inversa** T^{-1} de uma transformação linear **invertível** T

As **matrizes** de αT, $T_1 + T_2$, $T_1 \circ T_2$ e T^{-1} (se existir) em bases apropriadas

O **contradomínio** de T: $\mathcal{I}(T)$ (calcular bases)

O **núcleo** de T: $\mathcal{N}(T)$ (calcular bases)

Se $\dim U < \infty$, $\quad \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) = \dim U$

Transformação linear **injectiva (**e relação com dim)

Transformação linear **sobrejectiva (**e relação com dim)

Transformação linear **bijectiva (isomorfismo) (**e relação com dim)

Resolução de equações lineares: $T(u) = b$

Matriz de mudança de coordenadas

Definição. $\dim V = n$. $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases ordenadas de V.

À matriz $(a_{ij})_{n\times n}$ em que, com $j = 1, ..., n$:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$$

chama-se **matriz de mudança de coordenadas** (da base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$) e escreve-se

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = (a_{ij})_{n\times n}$$

Observação. A definição anterior pode ser escrita assim:

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

Teorema. A matriz $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ é invertível. Além disso, se $[u]_{\mathcal{B}_1}$ forem as coordenadas de u na base $\mathcal{B}_1$, **então** as coordenadas $[u]_{\mathcal{B}_2}$ de u na base $\mathcal{B}_2$ são dadas por:

$$[u]_{\mathcal{B}_2} = S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} [u]_{\mathcal{B}_1}$$

Dem. Por um lado

$$u = \mathcal{B}_1 [u]_{\mathcal{B}_1}$$

e por outro

$$u = \mathcal{B}_2 [u]_{\mathcal{B}_2} .$$

Assim

$$\mathcal{B}_2 [u]_{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}_1 [u]_{\mathcal{B}_1} =$$

$$= \left(\mathcal{B}_2 S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}\right) [u]_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{B}_2 \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} [u]_{\mathcal{B}_1}\right)$$

e atendendo à unicidade das coordenadas de um vector em relação a uma base, tem-se

$$[u]_{\mathcal{B}_2} = S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} [u]_{\mathcal{B}_1}$$

Observação.

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}\right)^{-1} \qquad \text{e} \qquad S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3} = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3} S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

Exemplo. $\mathcal{B}_1 = \{(1,-1),(1,1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,2),(3,4)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$

$$(1,-1) = -\frac{7}{2}(1,2)+\frac{3}{2}(3,4) \text{ logo } [(1,-1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$(1,1) = -\frac{1}{2}(1,2)+\frac{1}{2}(3,4) \text{ logo } [(1,1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$(3,1) = 1(1,-1) + 2(1,1)$

Coordenadas de $(3,1)$ na base $\mathcal{B}_1$: 1 e 2

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Logo $-\frac{9}{2}$ e $\frac{5}{2}$ são as coordenadas de $(3,1)$ na base $\mathcal{B}_2$.

De facto: $(3,1) = -\frac{9}{2}(1,2) + \frac{5}{2}(3,4)$

$$
\begin{aligned}
(1,-1) &= -\frac{7}{2}(1,2) + \frac{3}{2}(3,4) \\
(1,1) &= -\frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{2}(3,4)
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} (1,-1) & (1,1) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1,2) & (3,4) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

Definição. U e V espaços lineares

$T : U \to V$ é uma **transformação linear** se e só se $\forall u, v \in U \;\; \forall \lambda$ escalar

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(u) + T(v) \\ T(\lambda u) &= \lambda T(u) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \forall u, v \in U \;\; \forall \lambda, \mu$ escalares

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$$

Observação. T linear $\Rightarrow T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$

$T(\mathbf{0}_U) \neq \mathbf{0}_V \Rightarrow T$ não é linear

Exemplos de transformações não lineares

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (1 - y, 2x)$$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$T(x, y) = xy$$

Exemplos de transformações lineares

U espaço linear e k um escalar (fixo)

$$T_k : U \to U \qquad\qquad T_k(u) = ku$$

T_k é uma **homotetia**

Se $0 < k < 1$ $\quad$ T_k é uma **contracção**

Se $k > 1$ $\quad$ T_k é uma **dilatação**

Se $k = 1$ $\quad$ T_1 é a **transformação identidade** I

$$I(u) = u$$

$\forall\ u \in U$

Transformação nula $T : U \to V$, $T(u) = \mathbf{0}$, $\forall u \in U$

Exemplos de transformações lineares

(i) tr:$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\quad$ tr$(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

(ii) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad T(u) = Au, \quad A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ fixa

(iii) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad T(x, y, z, w) = (x - y, 3w)$

(iv) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \quad T(x, y, z) = (-z, y-2z, 2y, y+z)$

(v) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad T(x, y, z) = (x + 2y, 3z, x - z)$

Exemplos

(vi) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 & a_0 \\ a_0 & a_0 - a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

(vii) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2c - a + (b + 2c)\, t^2$$

(viii) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$T(X) = X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b - 2c & 2a - 2d \\ 2d - 2a & 2c - 2b \end{bmatrix}$$

(ix) $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad T(X) = X^T$

Exemplos

(i) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3 \qquad T(p(t)) = 2tp(1-t) - tp'(t)$

(ii) $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_1 \qquad T(p(t)) = p''(t)$

(iii) $T : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \qquad T(f) = f'$

(iv) $a \in \mathbb{R}$ (fixo) $\quad T : C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad T(f) = f'(a)$

(v) $n \in \mathbb{N} \quad T : C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \qquad T(f) = f^{(n)}$

(vi) $T : C(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R}) \qquad T(f) = \int_0^x f(t)\,dt$

Outro modo de definir uma transformação linear:

Sendo $T : U \to V$ linear e $U = L(\{v_1, \ldots, v_n\})$

Sendo $u \in U$ existem escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tais que

$$u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

Então

$$T(u) = \lambda_1 T(v_1) + ... + \lambda_n T(v_n)$$

ou seja, conhecendo-se as imagens $T(v_1), ..., T(v_n)$ com $U = L(\{v_1, \ldots, v_n\})$ fica a conhecer-se a **expressão geral** de $T : U \to V$ linear.

Além disso, sendo U e V espaços lineares com $U = L(\{u_1, \ldots, u_n\})$ e $T_1, T_2 : U \to V$ lineares

Se $T_1(u_i) = T_2(u_i) \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n,$ **então** $T_1 = T_2$

Isto é, tendo-se B base de V então $\forall u \in V$, $u = B\,[u]_B$

e sendo T linear então $T\,(u) = T\,(B)\,[u]_B$.

Sendo $T_1, T_2 : U \to V$ lineares com $T_1(u_i) = T_2(u_i)$ $\forall\ i = 1, \ldots, n$

então $T_1\,(B) = T_2\,(B)$ com $B = \{u_1, ..., u_n\}$ e assim $\forall u \in V$

$T_1(u) = T_1\,(B)\,[u]_B = T_2\,(B)\,[u]_B = T_2(u)$

logo $T_1 = T_2$

Exemplo. Seja $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ linear, $B = \{1-t, 1+t\}$ base de $\mathcal{P}_1$ tal que

$$T(1-t) = (0,1,2), \qquad T(1+t) = (-1,2,1).$$

Vejamos que a expressão geral de T é dada por:

$$T(a_0 + a_1 t) = \left(-\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2}a_1, \frac{3}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1, \frac{3}{2}a_0 - \frac{1}{2}a_1\right).$$

Resolução. Seja $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$. Determinemos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\underbrace{a_0 + a_1 t}_{u} = \alpha(1-t) + \beta(1+t)$$

$$\underbrace{a_0 + a_1 t}_{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-t & 1+t \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{[u]_B}$$

Resolvendo o sist.: $\alpha = \frac{1}{2}(a_0 - a_1)$ e $\beta = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)$.

$$\underbrace{a_0 + a_1 t}_{u} = \underbrace{\alpha\,(1-t) + \beta\,(1+t)}_{\underbrace{\begin{bmatrix} 1-t & 1+t \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{[u]_B}}$$

Resolvendo o sist.: $\alpha = \frac{1}{2}\,(a_0 - a_1)$ e $\beta = \frac{1}{2}\,(a_0 + a_1)$.

$$\underbrace{T\,(a_0 + a_1 t)}_{T(u)} = T\,(\alpha\,(1-t) + \beta\,(1+t)) \underset{T \text{ é linear}}{=}$$

$$= \alpha T\,(1-t) + \beta T\,(1+t) = \underbrace{\begin{bmatrix} T\,(1-t) & T\,(1+t) \end{bmatrix}}_{T(B)}\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{[u]_B} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} (0,1,2) & (-1,2,1) \end{bmatrix}}_{T(B)}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,(a_0 - a_1) \\ \frac{1}{2}\,(a_0 + a_1) \end{bmatrix}}_{[u]_B} =$$

$$= (0,1,2)\,\tfrac{1}{2}\,(a_0 - a_1) + (-1,2,1)\,\tfrac{1}{2}\,(a_0 + a_1) =$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}a_0 - \tfrac{1}{2}a_1, \tfrac{3}{2}a_0 + \tfrac{1}{2}a_1, \tfrac{3}{2}a_0 - \tfrac{1}{2}a_1\right).$$

Representação matricial

Definição. $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ base ordenada de U

$\mathcal{B}_2 = \{w_1, ..., w_m\}$ base ordenada de V

$T : U \to V$ linear tal que $\quad T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

A matriz que **representa** T em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ é definida por

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = (a_{ij})_{m \times n}$$

Observação. A definição anterior pode ser escrita assim:

$$T(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2 M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$$

Teorema. $T : U \to V$ linear. Sejam $[u]_{\mathcal{B}_1}$ as coordenadas de u em $\mathcal{B}_1$ e $[T(u)]_{\mathcal{B}_2}$ as coordenadas de $T(u)$ em $\mathcal{B}_2$. Então

$$T(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2 M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) \;\Rightarrow\; [T(u)]_{\mathcal{B}_2} = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)\, [u]_{\mathcal{B}}$$

Dem. Como

$$u = \mathcal{B}_1 [u]_{\mathcal{B}_1}$$

e T é linear então

$$T(u) = T(\mathcal{B}_1) [u]_{\mathcal{B}_1} .$$

Por outro lado

$$T(u) = \mathcal{B}_2 [T(u)]_{\mathcal{B}_2} .$$

Assim

$$\mathcal{B}_2 [T(u)]_{\mathcal{B}_2} = T(\mathcal{B}_1) [u]_{\mathcal{B}_1} =$$

$$= (\mathcal{B}_2 M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)) [u]_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{B}_2 \left(M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) [u]_{\mathcal{B}_1} \right)$$

e atendendo à unicidade das coordenadas de um vector em relação a uma base, tem-se

$$[T(u)]_{\mathcal{B}_2} = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) [u]_{\mathcal{B}_1}$$

Observação. Se $T = I$ tem-se

$$M(I; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

Teorema. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Sejam $\mathcal{B}_c^n$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$,

$\mathcal{B}_c^m$ a base canónica de $\mathbb{R}^m$ e

$$A = M(T; \mathcal{B}_c^n; \mathcal{B}_c^m) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Então

$$T(u) = Au$$

para todo o $u \in \mathbb{R}^n$.

Dem.

$$T(u) = [T(u)]_{\mathcal{B}_c^m} = M(T; \mathcal{B}_c^n; \mathcal{B}_c^m)\,[u]_{\mathcal{B}_c^n} = Au$$

Exemplo. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z, w) = (3x + y - 2z, 0, x + 4z).$$

Como

$$T(1, 0, 0, 0) = (3, 0, 1), \;\; T(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$T(0, 0, 1, 0) = (-2, 0, 4) \;\; \text{e} \;\; T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

então

$$A = M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe-se que

$$\begin{aligned} T(x, y, z, w) &= M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \\ &= (3x + y - 2z, 0, x + 4z) \end{aligned}$$

Exemplo. (Da fórmula para a matriz.)

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear tal que

$$T(x, y, z) = (-3x - 3y + 9z, x + y - 3z),$$

Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,-1)$

Vejamos como se obtém $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$.

Como

$$T(1,1,1) = (3,-1) = 1(1,1) + 2(1,-1)$$

$$T(0,1,1) = (6,-2) = 2(1,1) + 4(1,-1)$$

$$T(0,0,1) = (9,-3) = 3(1,1) + 6(1,-1)$$

então

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

Exemplo. (Da matriz para a fórmula.) Seja T : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear tal que $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, com $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$

Vejamos como se obtém a expressão geral de T. Como

$$(x,y,z) = x(1,1,1)+(y-x)\,(0,1,1)+(-y+z)\,(0,0,1)$$

então as coordenadas de $T\,(x,y,z)$ em $\mathcal{B}_2$ são dadas por:

$$[T\,(x,y,z)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y-x \\ -y+z \end{bmatrix}}_{[(x,y,z)]_{\mathcal{B}_1}} = \begin{bmatrix} -x-y+3z \\ -2x-2y+6z \end{bmatrix}$$

Logo

$$T\,(x,y,z) = (-x-y+3z)\,(1,1)+(-2x-2y+6z)\,(1,-1) =$$

$$= (-3x-3y+9z, x+y-3z)$$

Exemplo. (Da matriz para a fórmula passando pelas imagens de geradores.)

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear tal que

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$

Vejamos como se obtém a expressão geral de T.

Da matriz retiramos:

$$T\,(1,1,1) = 1(1,1) + 2(1,-1) = (3,-1)$$

$$T\,(0,1,1) = 2(1,1) + 4(1,-1) = (6,-2)$$

$$T\,(0,0,1) = 3(1,1) + 6(1,-1) = (9,-3)$$

Como $(x, y, z) = \mathcal{B}_1 \left[(x, y, z)\right]_{\mathcal{B}_1}$

então $T(x, y, z) = T(\mathcal{B}_1) \left[(x, y, z)\right]_{\mathcal{B}_1}$

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} T(1,1,1) & T(0,1,1) & T(0,0,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - x \\ -y + z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3,-1) & (6,-2) & (9,-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - x \\ -y + z \end{bmatrix} =$$

$$= (3,-1)\, x + (6,-2)\,(y - x) + (9,-3)\,(-y + z) =$$

$$= (-3x - 3y + 9z, x + y - 3z)$$

Definição. $S, T : U \to V$, λ escalar.

Então $S + T$, $\lambda T : U \to V$ são definidas por

$$(S + T)(u) = S(u) + T(u) \qquad (\lambda T)(u) = \lambda T(u)$$

Teorema. $S, T : U \to V$ lineares, λ escalar.

Então $S + T$, λT são lineares.

Exemplo. $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$S(x, y, z) = (x + 2y, x - z) \qquad T(x, y, z) = (y, -2x)$$

$$(S + 3T)(x, y, z) = (x + 5y, -5x - z)$$

Definição. (Composição) $T : U \to V, \quad S : V \to W$. Então $S \circ T : U \to W$ é definida por

$$(S \circ T)(u) = S(T(u))$$

Observação. Em geral $\quad S \circ T \neq T \circ S$

Teorema. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

Definição. $T^0 = I \qquad T^k = T \circ T^{k-1}, \quad k = 1, 2, ...$

Teorema. $T^{m+n} = T^m \circ T^n$

$$(R + S) \circ Q = R \circ Q + S \circ Q \qquad (\lambda R) \circ Q = \lambda (R \circ Q)$$

Teorema. $T : U \to V$, $S : V \to W$ lineares. Então $S \circ T : U \to W$ é linear

Teorema. T linear. Então

$$T \circ (R + S) = T \circ R + T \circ S \qquad T \circ (\lambda R) = \lambda (T \circ R)$$

Exemplo.

$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad S(x, y, z) = (y, -2x)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x, y) = (2x + y, x, x - y)$

$S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y)) = S(2x + y, x, x - y) =$

$= (x, -4x - 2y)$

$T \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(T \circ S)(x, y) = T(S(x, y)) = T(y, -2x) =$

$= (-2x + 2y, y, 2x + y)$

Teorema. $\mathcal{B}_1$ base de U, $\mathcal{B}_2$ base de V, λ, μ escalares, $S, T : U \to V$ lineares.

Então

$$M(\lambda S + \mu T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \lambda M(S; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) + \mu M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$$

Exemplo.

$$S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$S(x, y, z) = (x + 2y, x - z) \qquad T(x, y, z) = (y, -2x)$$

$$(S + 3T)(x, y, z) = (x + 5y, -5x - z)$$

$$M(S + 3T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M(S; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) + 3M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema. $\mathcal{B}_1$ base de U, $\mathcal{B}_2$ base de V, $\mathcal{B}_3$ base de W, λ, μ escalares, $T : U \to V$, $S : V \to W$ lineares.

Então $M(S \circ T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_3) = M(S; \mathcal{B}_2; \mathcal{B}_3) M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$

Exemplo. $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad S(x, y, z) = (y, -2x)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x, y) = (2x + y, x, x - y)$

$S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y)) = S(2x + y, x, x - y) =$

$= (x, -4x - 2y)$

$$M(S \circ T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M(S; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Definição. $\dim U = \dim V$. $T : U \to V$ linear diz-se **invertível** se e só se existir $S : V \to U$ tal que

$$S \circ T = I_U \quad \text{e} \quad T \circ S = I_V,$$

e neste caso $S = T^{-1}$.

Teorema. $\dim U = \dim V$, $T : U \to V$ linear. Se $A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ então

$$T \text{ invertível} \Leftrightarrow A \text{ invertível.}$$

Se T é linear e invertível então T^{-1} é linear e

$$A^{-1} = M(T^{-1}; \mathcal{B}_2; \mathcal{B}_1).$$

Teorema. $\dim U = \dim V = \dim W$, $T : U \to V$, $S : V \to W$ lineares invertíveis. Então $S \circ T$ é linear, invertível e

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

Exemplo. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y) = (x, -4x - 2y)$

Como $M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ é invertível

então T é invertível e

$$M(T^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Logo

$$T^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(x, -2x - \tfrac{1}{2}y\right)$$

De facto

$$T\left(x, -2x - \frac{1}{2}y\right) = (x,y)$$

Teorema. $T : U \to U$ linear $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de U. **Então**

$$\begin{array}{ccc} (U,\mathcal{B}) & \xrightarrow[T]{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})} & (U,\mathcal{B}) \\ S_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \\ (U,\mathcal{B}') & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}';\mathcal{B}')]{T} & (U,\mathcal{B}') \end{array}$$

Isto é

$$T = I \circ T \circ I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(T;\mathcal{B}';\mathcal{B}') = S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) S_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(T;\mathcal{B}';\mathcal{B}') = S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) \left(S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}$$

$$B = SAS^{-1}$$

Quando se tem a última igualdade dir-se-á que A e B são **semelhantes** e nesse caso ver-se-á que:

$\mathsf{car}\, A = \mathsf{car}\, B$ $\quad$ $\mathsf{nul}\, A = \mathsf{nul}\, B$ $\quad$ $\mathsf{tr}\, A = \mathsf{tr}\, B$
$\det A = \det B$ $\quad$ $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$

Teorema. Caso geral. $T : U \to V$ linear. $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_1'$ bases ordenadas de U. $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2'$ bases ordenadas de V. **Então**

$$\begin{array}{ccc} (U, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow[T]{M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)} & (V, \mathcal{B}_2) \\ S_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} \\ \left(U, \mathcal{B}_1'\right) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_1';\mathcal{B}_2')]{T} & \left(V, \mathcal{B}_2'\right) \end{array}$$

Isto é

$$T = I \circ T \circ I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(T; \mathcal{B}_1'; \mathcal{B}_2') = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) S_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_1}$$

Exemplo. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad T(x, y) = (y, x, y - x)$

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (-1, 1)\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T(1, 1) &= (1, 1, 0) = -(0, 0, 1) + 0(0, 1, 1) + 1\,(1, 1, 1) \\ T(-1, 1) &= (1, -1, 2) = 3(0, 0, 1) - 2(0, 1, 1) + 1\,(1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1, 0, 0) &= 0(0, 0, 1) - 1(0, 1, 1) + 1\,(1, 1, 1) \\ (0, 1, 0) &= -(0, 0, 1) + 1(0, 1, 1) + 0\,(1, 1, 1) \\ (0, 0, 1) &= 1(0, 0, 1) + 0(0, 1, 1) + 0\,(1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_2} M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_c^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{coordenadas de } (2,1) & \xrightarrow[T]{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)} & \text{coordenadas de } T(2,1) \\
\text{na base } \mathcal{B}_c^2 & & \text{na base } \mathcal{B}_c^3 \\
S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}_1} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_2} \\
\text{coordenadas de } (2,1) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)]{T} & \text{coordenadas de } T(2,1) \\
\text{na base } \mathcal{B}_1 & & \text{na base } \mathcal{B}_2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow[T]{} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \downarrow I & & I \downarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \xrightarrow{T} & \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &
\end{array}$$

Definição. U e V espaços lineares e $T : U \to V$ linear

(i) O **contradomínio** ou imagem de T:

$$\mathcal{I}(T) = \{T(u) : u \in U\}$$

(ii) O **núcleo** de T: $\mathcal{N}(T) = \{u \in U : T(u) = \mathbf{0}\}$

Teorema. U e V espaços lineares e $T : U \to V$ linear

(i) $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço de U

(ii) $\mathcal{I}(T)$ é um subespaço de V

(iii) Seja $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$. Se $U = L(S)$ então

$$\mathcal{I}(T) = L(\{T(u_1), \ldots, T(u_k)\}) = L(T(S))$$

(iv) Se $\dim U < \infty$ e $T : U \to V$ é linear **então**

$$\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$$

Exemplos.

$$T : U \to V \qquad T(u) = \mathbf{0} \quad \mathcal{N}(T) = U \quad \mathcal{I}(T) = \{\mathbf{0}\}$$

$$I : U \to U \qquad I(u) = u \quad \mathcal{N}(I) = \{\mathbf{0}\} \quad \mathcal{I}(I) = U$$

$$T : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \qquad T(f) = f'$$

$$\mathcal{I}(T) = C(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{N}(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é constante em } \mathbb{R}\}$$

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \qquad T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad T(u) = Au$$

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A) \qquad \mathcal{I}(T) = \mathcal{C}(A)$$

Exemplo. $T(x,y,z,w) = (3x + y - 2z, 0, x + 4z)$

$T(1,0,0,0) = (3,0,1)$, $T(0,1,0,0) = (1,0,0)$

$T(0,0,1,0) = (-2,0,4)$ e $T(0,0,0,1) = (0,0,0)$.

$$A = M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = 14z \text{ e } x = -4z\right\} = \\ = \quad \{(-4z, 14z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} = \\ = \quad L(\{(-4,14,1,0),(0,0,0,1)\}) \end{aligned}$$

$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}(A) = L\{(3,0,1),(1,0,0)\}$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4} = \underbrace{\dim \mathcal{N}(T)}_{=2} + \underbrace{\dim \mathcal{I}(T)}_{=2}$$

Teorema.

$$T : U \to V \text{ linear} \quad A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$\text{então} \quad [T(u)]_{\mathcal{B}_2} = A\,[u]_{\mathcal{B}_1}$$

Observação.

Os vectores de $\mathcal{N}(A)$ são as coordenadas dos vectores de $\mathcal{N}(T)$ em $\mathcal{B}_1$.

Os vectores de $\mathcal{C}(A)$ são as coordenadas dos vectores de $\mathcal{I}(T)$ em $\mathcal{B}_2$.

$$\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{N}(A) = \text{nul}\, A$$

$$\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{C}(A) = \text{car}\, A$$

Exemplo. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$$

$$A = M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}\right)$$

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{ \begin{array}{c} (-2)\,(1,1,1) + 1(0,1,1) + 0(0,0,1), \\ (-3)\,(1,1,1) + 0(0,1,1) + 1(0,0,1) \end{array} \right\}\right) =$$

$$= L\left(\{(-2,-1,-1),(-3,-3,-2)\}\right)$$

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,2)\}\right)$$

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{1(1,1) + 2(1,-1)\}\}\right) = L\left(\{(3,-1)\}\right)$$

Definição. $T : U \to V$ é **injectiva** se e só se

$$T(u) = T(w) \;\Rightarrow\; u = w$$

isto é

$$u \neq w \quad \Rightarrow \quad T(u) \neq T(w)$$

Teorema.

$$T \text{ injectiva } \Leftrightarrow \mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$$

Teorema. $T : U \to V$ linear $\dim U = \dim V$. Então

$$T \text{ injectiva } \Leftrightarrow T \text{ invertível}$$

Exemplo. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x, y) = (x, -4x - 2y)$

T é injectiva pois

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

e $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right) = \{(0, 0)\}$

Teorema. $\dim U < \infty \quad T : U \to V$ linear **então** são equivalentes:

(i) T é injectiva

(ii) $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$

(iii) $\dim U = \dim \mathcal{I}(T)$

(iv) T transforma qualquer conjunto linearmente independente de vectores de U num conjunto linearmente independente de vectores de V

(v) T transforma bases de U em bases de $\mathcal{I}(T)$

Definição. $T : U \to V$ é **sobrejectiva** se e só se

$$\mathcal{I}(T) = V$$

Teorema. $\dim U, \ \dim V < \infty \qquad T : U \to V$ linear.
Então

T é sobrejectiva **se e só se** T transformar um qualquer conjunto gerador de U num conjunto gerador de V

Exemplo. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x, y, z) = (y, -2x)$

T é sobrejectiva pois

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0, -2), (1, 0)\}\right) = \mathbb{R}^2$

Teorema. $\dim U < \infty$, $T : U \to V$ linear.

Então

$$T \text{ é sobrejectiva } \Rightarrow \dim U \geq \dim V$$

$$\dim U < \dim V \Rightarrow T \text{ não é sobrejectiva}$$

$$T \text{ é injectiva } \Rightarrow \dim U \leq \dim V$$

$$\dim U > \dim V \Rightarrow T \text{ não é injectiva}$$

Teorema. $\dim U = \dim V < \infty$, $T : U \to V$ linear.

Então

$$T \text{ é injectiva } \Leftrightarrow T \text{ é sobrejectiva}$$

Definição. $T : U \to V$ é **bijectiva** se e só se fôr injectiva e sobrejectiva

Definição. U e V espaços lineares são **isomorfos** se e só se existir um **isomorfismo** entre U e V, isto é, se e só se existir uma transformação linear bijectiva $T : U \to V$ e escreve-se

$$U \cong V$$

Teorema. U e V espaços lineares. Então

$$U \cong V \Leftrightarrow \mathsf{dim}\, U = \mathsf{dim}\, V$$

Exemplo. $T : U \to V$ linear. Se $A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ então

$$\mathcal{N}(T) \cong \mathcal{N}(A) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{I}(T) \cong \mathcal{C}(A)$$

Além disso:

$$T \text{ é injectiva} \Leftrightarrow \mathsf{nul}\, A = 0 \Leftrightarrow \mathsf{car}\, A = n$$

$$T \text{ é sobrejectiva} \Leftrightarrow \mathsf{car}\, A = m$$

Exemplos de Isomorfismos

(i) $\mathbb{R}^n \cong \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ $\qquad T : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$$T\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

(ii) $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$ $\qquad T : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}\right) = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

(iii) $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{P}_n$ $\qquad T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$

$$T\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

(iv) $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\qquad \mathcal{C}\left(A\right) \cong \mathcal{L}\left(A\right)$

$$\mathsf{dim}\, \mathcal{C}\left(A\right) = \mathsf{dim}\, \mathcal{L}\left(A\right) = \mathsf{car}\, A$$

Teorema. $T : U \to V$ linear, $b \in V$.

Então a equação linear $T(u) = b$

(**Existência de solução)** tem sempre solução (para qualquer b) se e só se T fôr sobrejectiva $(T(U) = V)$

(**Unicidade de solução)** a ter solução, ela é única se e só se T fôr injectiva se e só se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$

(**Existência e unicidade de solução)** tem sempre solução única u se e só se T fôr bijectiva

Teorema. $T : U \to V$ linear, $b \in V$. **Então**

$$\begin{array}{c}\text{solução geral de}\\ T(u) = b\end{array} = \begin{array}{c}\text{solução particular de}\\ T(u) = b\end{array} + \underbrace{\begin{array}{c}\text{solução geral de}\\ T(u) = \mathbf{0}\end{array}}_{\mathcal{N}(T)}$$

Exemplo. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear

$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$

$$A = M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver a equação linear: $T\,(x,y,z) = (6,-2)$

Primeiro note-se que:

$(6,-2) = 2(1,1) + 4(1,-1)$

a seguir resolve-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

obtendo-se

$\{(0,1,0)\} + \mathcal{N}(A) = \{(0,1,0)\} + L\left(\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}\right)$

Logo $CS = \{(0,1,1)\} + L\left(\{(-2,-1,-1),(-3,-3,-2)\}\right)$