Matriz de mudança de base: $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$

(como se faz e para que serve)

Transformação linear

A **matriz** de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$:
$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}')$

(como se faz e para que serve)

As **3** formas (equivalentes) de definir uma transformação linear

O **contradomínio** de T: $\mathcal{I}(T)$ (calcular bases)

O **núcleo** de T: $\mathcal{N}(T)$ (calcular bases)

Se $\dim U < \infty$, $\quad \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) = \dim U$

Operações com transformações lineares: αT, $T_1 + T_2$ e $T_1 \circ T_2$

A **inversa** de uma transformação linear **invertível**

As **matrizes** de αT, $T_1 + T_2$ e $T_1 \circ T_2$ em bases apropriadas

Transformação linear **injectiva (**e relação com dim)

Transformação linear **sobrejectiva (**e relação com dim)

Transformação linear **bijectiva (isomorfismo) (**e relação com dim)

Resolução de equações lineares: $T(u) = b$

Valores próprios e **vectores próprios** de uma transformação linear

Transformações lineares **diagonalizáveis**

Definição. U e V espaços lineares

$T : U \to V$ é uma **transformação linear** se e só se $\forall u, v \in U \quad \forall \lambda$ escalar

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(u) + T(v) \\ T(\lambda u) &= \lambda T(u) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \forall u, v \in U \quad \forall \lambda, \mu$ escalares

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$$

Observação. T linear $\Rightarrow T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$

$T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}' \Rightarrow T$ não é linear

Exemplos de transformações não lineares

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (1 - y, 2x)$$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$T(x, y) = xy$$

Exemplos de transformações lineares

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad T(x,y,z,w) = (x-y, 3w)$$

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad T(x,y,z) = (-z, y-2z, 2y, y+z)$$

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad T(x,y,z) = (x+2y, 3z, x-z)$$

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad T(u) = Au \qquad A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$\mathrm{tr} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3 \qquad T(p(t)) = 2tp(1-t) - tp'(t)$$

$$T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_1 \qquad T(p(t)) = p''(t)$$

$$T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$$

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad T(X) = \mathrm{tr}(X) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação nula $\quad \mathbf{0}$ o vector nulo de V, $\forall u \in U$

$$T : U \to V \qquad T(u) = \mathbf{0}$$

$$T: C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \qquad T(f) = f'$$

$$a \in \mathbb{R} \ \text{(fixo)} \qquad T: C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad T(f) = f'(a)$$

$$n \in \mathbb{N} \quad T: C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \qquad T(f) = f^{(n)}$$

$$T: C(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R}) \qquad T(f) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$T: \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad T(X) = X^T$$

$$T: \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad T(X) = AX$$

U espaço linear e k um escalar (fixo)

$$T_k : U \to U \qquad\qquad T_k(u) = ku$$

T_k é uma **homotetia**

Se $0 < k < 1$ $\quad$ T_k é uma **contracção**

Se $k > 1$ $\quad$ T_k é uma **dilatação**

Se $k = 1$ $\quad$ T_1 é a **transformação identidade** I

$$I(u) = u$$

$\forall\ u \in U$

Restrição: $T\,|_U : U \to W$ $\quad$ de $T : V \to W$

com U subespaço de V.

Outro modo de definir uma transformação linear:

Sendo $\quad T : U \to V$ linear $\quad$ e $\quad U = L\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$

Sendo $u \in U$ existem escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tais que

$$u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

Então

$$T(u) = \lambda_1 T(v_1) + ... + \lambda_n T(v_n)$$

ou seja, conhecendo-se as imagens $T(v_1), ..., T(v_n)$ com $U = L\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$ fica a conhecer-se a **expressão geral** de $T : U \to V$ linear.

Além disso, sendo U e V espaços lineares com $U = L\left(\{u_1, \ldots, u_n\}\right)$ e $T_1, T_2 : U \to V$ lineares

Se $T_1(u_i) = T_2(u_i) \ \ \forall \ i = 1, \ldots, n,$ **então** $T_1 = T_2$

Exemplo. $\mathbb{R}^2 = L\left(\left\{(1,0),(0,1)\right\}\right)$. Seja

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

linear tal que

$$T\,(1,0) = 1 \qquad\qquad T\,(0,1) = 1.$$

$$T(x,y) = T\left(x(1,0) + y(0,1)\right) =$$

$$= xT(1,0) + yT(0,1) = x + y$$

logo

$$T(x,y) = x + y$$

U e V espaços lineares e $T : U \to V$ linear $\mathbf{0}$ o vector nulo de V

O **contradomínio** ou imagem de T:

$$\mathcal{I}(T) = \{T(u) : u \in U\}$$

Se $U = L\left(\{u_1, \ldots, u_k\}\right)$ então

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T\left(u_1\right), \ldots, T\left(u_k\right)\}\right)$$

$\mathcal{I}(T)$ é um subespaço de V

O **núcleo** de T:

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in U : T(u) = \mathbf{0}\}$$

$\mathcal{N}(T)$ é um subespaço de U

Se $\dim U < \infty$ $\quad T : U \to V$ linear **Então**

$$\dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) = \dim U$$

Exemplos.

$$T : U \to V \qquad T(u) = \mathbf{0}' \quad \mathcal{N}(T) = U \quad \mathcal{I}(T) = \{\mathbf{0}'\}$$

$$I : U \to U \qquad I(u) = u \quad \mathcal{N}(I) = \{\mathbf{0}\} \quad \mathcal{I}(I) = U$$

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \qquad T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad T(u) = Au$$

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A) \qquad \mathcal{I}(T) = \mathcal{C}(A)$$

$$T : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \qquad T(f) = f'$$

$$\mathcal{I}(T) = C(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{N}(T) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é constante em } \mathbb{R}\}$$

$T : U \to U$ linear diz-se **projecção** se e só se

$$T \circ T = T \qquad (T^2 = T)$$

T projecção $\Rightarrow$ os valores próprios de T são 0 e 1

T projecção $\Rightarrow U = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{I}(T)$

T projecção $\Rightarrow \mathcal{I}(T) = \mathcal{N}(T - I)$

T projecção $\Rightarrow U = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T - I)$

T projecção $\Rightarrow T$ é diagonalizável

Os valores próprios de T são 0 e 1 $\not\Rightarrow T$ projecção

Considerando o produto interno usual

$T : U \to U$ linear diz-se **projecção ortogonal** se e só se

$$T \circ T = T \qquad (T^2 = T) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{N}(T) = (\mathcal{I}(T))^{\perp}$$

$T : U \to V$ é **injectiva** se e só se $T(u) = T(w) \;\Rightarrow\; u = w$

$$u \neq w \;\;\Rightarrow\;\; T(u) \neq T(w)$$

$\dim U,\ \dim V < \infty \quad T : U \to V$ linear

Então são equivalentes:

T é injectiva

$\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$

$\dim U = \dim T(U)$

T transforma vectores linearmente independentes de U em vectores linearmente independentes de V

T transforma bases de U em bases de $T(U)$

$T : U \to V$ é **sobrejectiva** se e só se $T(U) = V$

$\dim U, \ \dim V < \infty \qquad T : U \to V$ linear

T é sobrejectiva **se e só se** T transformar um qualquer conjunto gerador de U num conjunto gerador de V

$$\dim U,\ \dim V < \infty \qquad T : U \to V \text{ linear}$$

$$T \text{ sobrejectiva} \ \Rightarrow \ \dim V \leq \dim U$$

$$T \text{ injectiva} \ \Rightarrow \ \dim U \leq \dim V$$

$$\dim U = \dim V < \infty \qquad T : U \to V \text{ linear } \textbf{Então}$$

$$T \text{ é injectiva} \ \Leftrightarrow \ T \text{ é sobrejectiva}$$

$T : U \to V$ é **bijectiva** se e só se fôr injectiva e sobrejectiva

U e V espaços lineares são **isomorfos** se existir um **isomorfismo** entre U e V, isto é, se existir uma transformação linear bijectiva $T : U \to V$

$$U \cong V$$

$$U \cong V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

Exemplos de Isomorfismos

$$\mathbb{R}^n \cong \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \qquad T : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

$$T\,(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn} \qquad T : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}\right) = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

$$\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathcal{P}_n \qquad T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$$

$$T\,(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \qquad \mathcal{C}\,(A) \cong \mathcal{L}\,(A)$$

$$\dim \mathcal{C}\,(A) = \dim \mathcal{L}\,(A) = \operatorname{car} A$$

T : $U \longrightarrow V$ linear $\quad b \in V$

Então a equação linear $T(u) = b$

(**Existência de solução)** tem sempre solução (para qualquer b) se e só se T fôr sobrejectiva ($T(U) = V$)

(**Unicidade de solução)** a ter solução, ela é única se e só se T fôr injectiva se e só se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$

(**Existência e unicidade de solução)** tem sempre solução única u se e só se T fôr bijectiva

T : $U \longrightarrow V$ linear $\quad b \in V$

A **solução geral** de $T(u) = b$:

$$\{\text{solução particular de } T(u) = b\} \quad + \quad \mathcal{N}(T)$$

Matriz de mudança de base

Definição. $\dim V = n$. $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases ordenadas de V.

À matriz $(a_{ij})_{n\times n}$ em que, com $j = 1, ..., n$:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$$

chama-se **matriz de mudança de base** (da base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$) e escreve-se

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = (a_{ij})_{n\times n}$$

Teorema A matriz $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ é invertível. Além disso, se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ forem as coordenadas de u na base $\mathcal{B}_1$, isto é:

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j,$$

então as coordenadas $\beta_1, ..., \beta_n$ de u na base $\mathcal{B}_2$ são dadas por:

$$[u]_{\mathcal{B}_2} = S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} [u]_{\mathcal{B}_1}$$

Dem.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j \right) w_i. \end{aligned}$$

As coordenadas de um vector u numa base são únicas. Logo, para todo o $i = 1, ..., n$,

$$\beta_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j \right)$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Observação.

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \ldots & w_n \end{bmatrix} S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

Exemplo. $\mathcal{B}_1 = \{(1,-1),(1,1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,2),(3,4)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$

$$(1,-1) = -\frac{7}{2}(1,2) + \frac{3}{2}(3,4)$$

$$(1,1) = -\frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{2}(3,4)$$

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$(3,1) = 1(1,-1) + 2(1,1)$

Coordenadas de $(3,1)$ na base $\mathcal{B}_1$: 1 e 2

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Logo $-\frac{9}{2}$ e $\frac{5}{2}$ são as coordenadas de $(3,1)$ na base $\mathcal{B}_2$.

De facto:

$$(3,1) = -\frac{9}{2}(1,2) + \frac{5}{2}(3,4)$$

$$(1,-1) = -\frac{7}{2}(1,2) + \frac{3}{2}(3,4)$$

$$(1,1) = -\frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{2}(3,4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}}$$

Observação. Sendo $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases ordenadas de um espaço euclidiano V. Se se tiver

$$\langle u, v\rangle = \left([u]_{\mathcal{B}_1}\right)^T G_{\mathcal{B}_1} [v]_{\mathcal{B}_1}$$

e também

$$\langle u, v\rangle = \left([u]_{\mathcal{B}_2}\right)^T G_{\mathcal{B}_2} [v]_{\mathcal{B}_2}$$

ou seja:

$$\langle u, v\rangle = \left([u]_{\mathcal{B}_2}\right)^T G_{\mathcal{B}_2} [v]_{\mathcal{B}_2} =$$

$$= \left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} [u]_{\mathcal{B}_1}\right)^T G_{\mathcal{B}_2} S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} [v]_{\mathcal{B}_1} =$$

$$= \left([u]_{\mathcal{B}_1}\right)^T \left(S^T_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} G_{\mathcal{B}_2} S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\right) [v]_{\mathcal{B}_1}$$

então

$$S^T_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} G_{\mathcal{B}_2} S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = G_{\mathcal{B}_1}$$

Representação matricial

$\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ base ordenada de U

$\mathcal{B}_2 = \{w_1, ..., w_m\}$ base ordenada de V

$T : U \to V$ linear $\quad A = (a_{ij})_{m \times n}$:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

A **representa** T em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$:

$$A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$$

Se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são as coordenadas de $u \in U$ em $\mathcal{B}_1$ **então** as coordenadas $\beta_1, ..., \beta_m$ de $T(u) \in V$ em $\mathcal{B}_2$ são dadas por:

$$[T(u)]_{\mathcal{B}_2} = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)\,[u]_{\mathcal{B}_1}$$

Se $T = I$ tem-se

$$M(I; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

$$T : U \to V \quad \text{linear}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\} \qquad\qquad \mathcal{B}_2 = \{w_1, ..., w_m\}$$

$$A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i &= T(u) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T\left(v_j\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right) w_i\end{aligned}$$

Logo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}}_{[T(u)]_{\mathcal{B}_2}} = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{[u]_{\mathcal{B}_1}}$$

Exemplo. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear

$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$

$$A = M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

$T\,(1,1,1) = 1(1,1) + 2(1,-1) = (3,-1)$

$T\,(0,1,1) = 2(1,1) + 4(1,-1) = (6,-2)$

$T\,(0,0,1) = 3(1,1) + 6(1,-1) = (9,-3)$

$(x,y,z) = x(1,1,1) + (y-x)\,(0,1,1) + (-y+z)\,(0,0,1)$

$T\,(x,y,z) \underset{T \text{ é linear}}{=}$

$= xT(1,1,1) + (y-x)\,T(0,1,1) + (-y+z)\,T(0,0,1) =$

$= x\,(3,-1) + (y-x)\,(6,-2) + (-y+z)\,(9,-3) =$

$= (-3x - 3y + 9z, x + y - 3z)$

$\mathcal{B}_c^n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_c^m = \left\{e'_1, \ldots, e'_m\right\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^m$

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = M(T; \mathcal{B}_c^n; \mathcal{B}_c^m) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} T(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \\ &= a_{1j} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + ... + a_{mj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então, para todo o $u \in \mathbb{R}^n$

$$T(u) = Au$$

Exemplo. $T(x,y,z,w) = (3x + y - 2z, 0, x + 4z)$

$$A = M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$T(1,0,0,0) = (3,0,1)$, $T(0,1,0,0) = (1,0,0)$

$T(0,0,1,0) = (-2,0,4)$ e $T(0,0,0,1) = (0,0,0)$.

$$\begin{aligned} T(x,y,z,w) &= M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \\ &= (3x + y - 2z, 0, x + 4z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A) &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = 14z \text{ e } x = -4z\right\} = \\ &= \{(-4z, 14z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} = \\ &= L(\{(-4,14,1,0), (0,0,0,1)\}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}(A) = L\{(3,0,1), (1,0,0)\}$$

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4} = \underbrace{\dim \mathcal{N}(T)}_{=2} + \underbrace{\dim \mathcal{I}(T)}_{=2}$$

$T : U \to V$ linear $\qquad A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}_2} = A\,[u]_{\mathcal{B}_1}$$

Os vectores de $\mathcal{N}(A)$ são as coordenadas dos vectores de $\mathcal{N}(T)$ em $\mathcal{B}_1$

Os vectores de $\mathcal{C}(A)$ são as coordenadas dos vectores de $\mathcal{I}(T)$ em $\mathcal{B}_2$

$$\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{N}(A) = \operatorname{nul} A$$

$$\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car} A$$

Então: $\qquad \mathcal{N}(T) \cong \mathcal{N}(A) \qquad \mathcal{I}(T) \cong \mathcal{C}(A)$

Além disso:

$$T \text{ é injectiva} \Leftrightarrow \operatorname{nul} A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{car} A = n$$

$$T \text{ é sobrejectiva} \Leftrightarrow \operatorname{car} A = m$$

Exemplo. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$$

$$A = M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}\right)$$

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{\begin{array}{c} (-2)(1,1,1) + 1(0,1,1) + 0(0,0,1), \\ (-3)(1,1,1) + 0(0,1,1) + 1(0,0,1) \end{array}\right\}\right) =$$

$$= L\left(\{(-2,-1,-1),(-3,-3,-2)\}\right)$$

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,2)\}\right)$$

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{1(1,1) + 2(1,-1)\}\right) = L\left(\{(3,-1)\}\right)$$

$S, T : U \to V$ lineares $\qquad \lambda$ escalar

Então $\quad S + T, \quad \lambda T : U \to V$ são lineares

$$(S + T)(u) = S(u) + T(u)$$

$$(\lambda T)(u) = \lambda T(u)$$

$\mathfrak{L}(U, V) = \{T : U \to V \text{ linear}\}$ é um espaço linear.

$T : U \to V \qquad S : V \to W \qquad$ lineares

$$S \circ T : U \to W \qquad (S \circ T)(u) = S(T(u))$$

é linear

Em geral $\quad S \circ T \neq T \circ S$

$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

$T \circ (R + S) = T \circ R + T \circ S \qquad T \circ (\lambda R) = \lambda (T \circ R)$

$(R + S) \circ Q = R \circ Q + S \circ Q \qquad (\lambda R) \circ Q = \lambda (R \circ Q)$

$$T^0 = I \qquad T^k = T \circ T^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$T^{m+n} = T^m \circ T^n$$

Se $\dim U = \dim V$

$T : U \to V$ é **invertível** se existir $S : V \to U$

$$S \circ T = I_U \quad \text{e} \quad T \circ S = I_V,$$

$S = T^{-1}$

$\mathfrak{L}(U,V) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(U,V) & \to & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ T & \to & M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) \end{array}$$

é um isomorfismo.

$$\dim \mathfrak{L}(U,V) = mn$$

$\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de U e V λ escalar

$T, T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(U,V)$ $S \in \mathfrak{L}(V,W)$ **Então**

$$M(T_1+\lambda T_2;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = M(T_1;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)+\lambda M(T_2;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$$

$$M(S\circ T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_3) = M(S;\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_3)M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$$

Se $A = M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ então:

T invertível $\Leftrightarrow$ A invertível.

Nesse caso:

$$A^{-1} = M(T^{-1};\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_1)$$

T : $U \longrightarrow U$ linear $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de U. **Então**

$$\begin{array}{ccc} (U,\mathcal{B}) & \overset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\underset{T}{\longrightarrow}} & (U,\mathcal{B}) \\ S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \\ (U,\mathcal{B}') & \underset{M(T;\mathcal{B}';\mathcal{B}')}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (U,\mathcal{B}') \end{array}$$

Isto é

$$T \circ I = I \circ T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(T;\mathcal{B}';\mathcal{B}')S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(T;\mathcal{B}';\mathcal{B}') = S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})\left(S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}$$

$$B = SAS^{-1}$$

Quando se tem a última igualdade diz-se que A e B são **semelhantes**, sendo S a matriz de semelhança.

car A = car B nul A = nul B tr A = tr B

det A = det B det $(A - \lambda I)$ = det $(B - \lambda I)$

Caso geral. $T : U \to V$ linear. $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}'_1$ bases ordenadas de U. $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}'_2$ bases ordenadas de V. **Então**

$$\begin{array}{ccc} (U, \mathcal{B}_1) & \overset{M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)}{\underset{T}{\longrightarrow}} & (V, \mathcal{B}_2) \\ S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}'_1} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}'_2} \\ \left(U, \mathcal{B}'_1\right) & \overset{T}{\underset{M(T;\mathcal{B}'_1;\mathcal{B}'_2)}{\longrightarrow}} & \left(V, \mathcal{B}'_2\right) \end{array}$$

Isto é

$$T \circ I = I \circ T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(T; \mathcal{B}'_1; \mathcal{B}'_2) S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}'_1} = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}'_2} M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(T; \mathcal{B}'_1; \mathcal{B}'_2) = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}'_2} M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) S_{\mathcal{B}'_1 \to \mathcal{B}_1}$$

Exemplo. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad T(x,y) = (y, x, y-x)$

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}_1 = \{(1,1), (-1,1)\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T(1,1) &= (1,1,0) = -(0,0,1) + 0(0,1,1) + 1\,(1,1,1) \\ T(-1,1) &= (1,-1,2) = 3(0,0,1) - 2(0,1,1) + 1\,(1,1,1) \end{aligned}$$

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= 0(0,0,1) - 1(0,1,1) + 1\,(1,1,1) \\ (0,1,0) &= -(0,0,1) + 1(0,1,1) + 0\,(1,1,1) \\ (0,0,1) &= 1(0,0,1) + 0(0,1,1) + 0\,(1,1,1) \end{aligned}$$

$$S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_2} M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_c^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$$

$$
\begin{array}{ccc}
\text{coordenadas de } (2,1) & \xrightarrow[T]{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)} & \text{coordenadas de } T(2,1) \\
\text{na base } \mathcal{B}_c^2 & & \text{na base } \mathcal{B}_c^3 \\
S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}_1} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_2} \\
\text{coordenadas de } (2,1) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)]{T} & \text{coordenadas de } T(2,1) \\
\text{na base } \mathcal{B}_1 & & \text{na base } \mathcal{B}_2.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow[T]{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \downarrow I & & I \downarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \xrightarrow[\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}]{T} & \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$T: V \to V$ linear. λ é um **valor próprio** de T se existir $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que

$$T(v) = \lambda v$$

a esses vectores não nulos v chamam-se **vectores próprios** associados ao valor próprio λ.

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

é o **subespaço próprio** associado ao valor próprio λ e

$$\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) = m_g(\lambda)$$

é a **multiplicidade geométrica** de λ.

$T : V \to V$ linear.

$$\lambda \text{ é um valor próprio de } T \Leftrightarrow \mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$$

Se $A = M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ então

$\{$valores próprios de $T\} = \{$valores próprios de $A\}$

Os vectores de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ são as coordenadas dos vectores de $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ em $\mathcal{B}$.

$$m_g(\lambda) = \dim \mathcal{N}(T - \lambda I) = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I).$$

Se $V = \mathbb{R}^n$ e $A = M(T; \mathcal{B}_c^n; \mathcal{B}_c^n)$ então

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(A - \lambda I)$$

$$\{\text{valores próprios de } T\} = \{\text{valores próprios de } A\}$$

$$\{\text{vectores próprios de } T\} = \{\text{vectores próprios de } A\}$$

$T : V \to V$ linear. T **é diagonalizável** se existir uma base (ordenada) $\mathcal{B}$ de V em relação à qual a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ seja uma matriz diagonal D.

Nesse caso tem-se $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{vp}$

Se $A = M(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e se existir $\mathcal{B}_{vp}$ **então**

$$D = M(T, \mathcal{B}_{vp}, \mathcal{B}_{vp}) = PAP^{-1},$$

com $P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}}$

Se $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_c^n$ então $P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^n}$