Resolução da ficha de preparação para o 2^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LENO - MEAer - MEAmbi - MEBiol - MEEC - MEM - MEMec - MEQ

1) Seja

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + 2d = 2b + c = 0 \right\}.$$

Considere

$$T : U \to \mathcal{P}_2$$

linear tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + t^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -2 - 2t^2 \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 - t^2.$$

a) Como

$$\dim U = \operatorname{nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

e $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente e está contido em U, então $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de U. Assim, sendo T linear, $\{1 + t^2\}$ gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente logo é base de $\mathcal{I}(T)$. Como

$$\dim \mathcal{N}(T) = 2 - \dim \mathcal{I}(T) = 1$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{0}$$

então $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$.

b)

$$T\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

logo T não é injectiva. Como $\dim \mathcal{I}(T) = 1$ e $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ então $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_2$ e logo T não é sobrejectiva.

c) T é linear logo

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 + 3t^2 \quad \text{e como} \quad \mathcal{N}(T) = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right)$$

então o conjunto solução CS de $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3 + 3t^2$ é dado por

$$CS = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}\right\} + L\left(\left\{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

2) Considere as transformações lineares

$$T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1$$

tais que

$$T(1+t) = (1,1), \qquad T(1-t) = (1,-1) \quad \text{e} \quad M\left(S; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

e

$$\mathcal{B} = \{1+t, 1-t\}$$

bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{P}_1$ respectivamente.

a) Como $\{1+t, 1-t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$ e $\{T(1+t), T(1-t)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ então T é injectiva. Como

$$\dim \mathcal{I}(T) = \dim L(\{T(1+t), T(1-t)\}) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$ e assim T é sobrejectiva. Assim, sendo T linear e bijectiva é então um isomorfismo.

Como

$$T(1) = \frac{1}{2}(T(1+t) + T(1-t)) = \frac{1}{2}((1,1) + (1,-1)) = (1,0)$$

e

$$T(t) = \frac{1}{2}(T(1+t) - T(1-t)) = \frac{1}{2}((1,1) - (1,-1)) = (0,1)$$

e sendo $\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1} = \{1, t\}$ tem-se

$$M\left(T; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}; \mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e assim

$$\left[T^{-1}(x,y)\right]_{\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

pelo que

$$T^{-1}(x,y) = x + yt$$

para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Uma base para $\mathcal{N}(T)$: $\varnothing$ uma vez que sendo T injectiva tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}.$$

Uma base para $\mathcal{I}(T)$: $\mathcal{B}_c^2$ uma vez que

$$\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2.$$

Como

$$\mathcal{N}\left(M\left(S;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}\right)\right) = \mathcal{N}\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) = L\left(\{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}\right)$$

então

$$\mathcal{N}(S) = L\left(\left\{\left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right],\left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right\}\right) \quad \text{e como} \quad \left\{\left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right],\left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right\}$$

é linearmente independente, é então uma base para $\mathcal{N}(S)$.

Como

$$\mathcal{C}\left(M\left(S;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}\right)\right) = \mathcal{C}\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) = L\left(\{(1,0),(0,1)\}\right) = \mathbb{R}^2$$

então $\{1+t, 1-t\}$ é uma base para $\mathcal{I}(S)$, isto é $\mathcal{I}(S) = \mathcal{P}_1$ e assim $\{1,t\}$ poderá também ser uma base para $\mathcal{I}(S)$.

c) Como

$$\left[\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]\right]_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right]$$

então

$$\left[S\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

e assim

$$S\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]\right) = 0(1+t) + 0(1-t) = 0 + 0t = \mathbf{0}.$$

d) Como

$$\left[\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]\right]_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}} = \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}\right]$$

então

$$\left[S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

e assim

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+c)(1+t) + (b+d)(1-t) = a+b+c+d+(a-b+c-d)\,t,$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

e) Tendo-se

$$M(S;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}) = M\left(S;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}\right) S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_c^{2\times 2}} \quad \text{e} \quad S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_c^{2\times 2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$M(S;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

f) Como

$$T(a_0 + a_1 t) = (a_0, a_1)$$

e

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+b+c+d+(a-b+c-d)\,t$$

então

$$(T \circ S)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right) =$$

$$= T\left(a+b+c+d+(a-b+c-d)\,t\right) = (a+b+c+d, a-b+c-d)\,,$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

g) Como

$$T(a_0 + a_1 t) = (5,0) \Leftrightarrow (a_0, a_1) = (5,0)\,,$$

o conjunto solução CS de

$$T(a_0 + a_1 t) = (5, 0)$$

é dado por

$$CS = \{5\}.$$

h) Como

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b + c + d + (a - b + c - d)\, t$$

então

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2 \Leftrightarrow (a + b + c + d = 2 \quad \text{e} \quad a - b + c - d = 0) \Leftrightarrow (a = 1 - c \quad \text{e} \quad b = 1 - d).$$

Logo o conjunto solução CS de

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2$$

é dado por

$$CS = \left\{ \begin{bmatrix} 1-c & 1-d \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observe-se que pode escrever-se

$$CS = \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{Solução particular de } S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2} + \underbrace{L\left(\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right)}_{\mathcal{N}(S)}.$$

3) Considere as transformações lineares

$$T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad S : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$$

tais que

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(S; \mathcal{B}_3; \mathcal{B}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com

$$\mathcal{B}_1 = \{1 + t, 1 - t\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_4 = \{1 - t, 1\}$$

bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$,

$$\mathcal{B}_2 = \{(0, 1), (1, 0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_3 = \{(1, -1), (1, 0)\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

a) Tendo-se

$$M\left(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_3\right)=S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_3}M\left(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2\right)\quad \text{e}\quad S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_3}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(0,1)=-1\,(1,-1)+1\,(1,0)\quad \text{e}\quad (1,0)=0\,(1,-1)+1\,(1,0)$$

então

$$M\left(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_3\right)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

e assim

$$M\left(S\circ T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_4\right)=M\left(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_4\right)M\left(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_3\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

OU

$$M\left(S;\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_4\right)=M\left(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_4\right)S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_3}\quad \text{e}\quad S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_3}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(0,1)=-1\,(1,-1)+1\,(1,0)\quad \text{e}\quad (1,0)=0\,(1,-1)+1\,(1,0)$$

então

$$M\left(S;\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_4\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

e assim

$$M\left(S\circ T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_4\right)=M\left(S;\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_4\right)M\left(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

b) Tendo-se

$$M\left(T;\mathcal{B}_4;\mathcal{B}_2\right)=M\left(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2\right)S_{\mathcal{B}_4\to\mathcal{B}_1}\quad \text{e}\quad S_{\mathcal{B}_4\to\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

uma vez que

$$1-t=0\,(1+t)+1\,(1-t)\quad \text{e}\quad 1=\frac{1}{2}\,(1+t)+\frac{1}{2}\,(1-t)$$

então

$$M\left(T;\mathcal{B}_4;\mathcal{B}_2\right)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

e assim

$$M\left(T\circ S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_2\right)=M\left(T;\mathcal{B}_4;\mathcal{B}_2\right)M\left(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_4\right)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & \frac{7}{2}\end{bmatrix}.$$

OU

$$M\left(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_1\right)=S_{\mathcal{B}_4\to\mathcal{B}_3}M\left(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_4\right)\quad \text{e}\quad S_{\mathcal{B}_4\to\mathcal{B}_3}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

uma vez que

$$1-t=0\,(1+t)+1\,(1-t)\quad \text{e}\quad 1=\frac{1}{2}\,(1+t)+\frac{1}{2}\,(1-t)$$

então

$$M\,(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_1)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

e assim

$$M\,(T\circ S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_2)=M\,(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\,M\,(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_1)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & \frac{7}{2}\end{bmatrix}.$$

c) Como

$$a_0+a_1t=\frac{1}{2}\,(a_0+a_1)\,(1+t)+\frac{1}{2}\,(a_0-a_1)\,(1-t)$$

e

$$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\,(a_0+a_1)\\ \frac{1}{2}\,(a_0-a_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_0\\ \frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1\end{bmatrix}$$

então

$$T\,(a_0+a_1t)=(-a_0)\,(0,1)+\left(\frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1\right)(1,0)=\left(\frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1,-a_0\right)$$

OU

Como

$$T\,(1+t)=(-1)\,(0,1)+2\,(1,0)=(2,-1)\qquad \text{e}\qquad T\,(1-t)=(-1)\,(0,1)+1\,(1,0)=(1,-1)$$

e

$$a_0+a_1t=\frac{1}{2}\,(a_0+a_1)\,(1+t)+\frac{1}{2}\,(a_0-a_1)\,(1-t)$$

então

$$T\,(a_0+a_1t)=\frac{1}{2}\,(a_0+a_1)\,T\,(1+t)+\frac{1}{2}\,(a_0-a_1)\,T\,(1-t)=$$

$$=\frac{1}{2}\,(a_0+a_1)\,(2,-1)+\frac{1}{2}\,(a_0-a_1)\,(1,-1)=\left(\frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1,-a_0\right)$$

OU

Como

$$M\left(T;\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1};\mathcal{B}_c^2\right)=S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_c^2}M\,(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\,S_{\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}\to\mathcal{B}_1}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1 \\ -a_0 \end{bmatrix}$$

então

$$T\left(a_0 + a_1 t\right) = \left(\frac{3}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1, -a_0\right).$$

d) T é linear,

$$\dim \mathcal{N}\left(T\right) = \operatorname{nul} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

logo

$$\mathcal{N}\left(T\right) = \{\mathbf{0}\} \left(= \{0 + 0t\}\right)$$

e assim T é injectiva. Além disso $\dim \mathcal{P}_1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ logo T é um isomorfismo por ser linear, injectiva e sobrejectiva.

(**OU** T é linear,

$$\dim \mathcal{I}\left(T\right) = \operatorname{car} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

logo $\mathcal{I}\left(T\right) = \mathbb{R}^2$ e assim T é sobrejectiva. Além disso $\dim \mathcal{P}_1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ logo T é um isomorfismo por ser linear, injectiva e sobrejectiva.)

Como

$$T\left(1 + t\right) = \left(2, -1\right) \Leftrightarrow 1 + t = T^{-1}\left(2, -1\right)$$

e

$$T\left(1 - t\right) = \left(1, -1\right) \Leftrightarrow 1 - t = T^{-1}\left(1, -1\right)$$

e

$$\left(x, y\right) = \left(x + y\right)\left(2, -1\right) + \left(-x - 2y\right)\left(1, -1\right)$$

então

$$T^{-1}\left(x, y\right) = \left(x + y\right) T^{-1}\left(2, -1\right) + \left(-x - 2y\right) T^{-1}\left(1, -1\right) =$$

$$= \left(x + y\right)\left(1 + t\right) + \left(-x - 2y\right)\left(1 - t\right) = -y + \left(2x + 3y\right) t$$

OU

Como

$$M\left(T^{-1}; \mathcal{B}_2; \mathcal{B}_1\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$M\left(T^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}\right)=S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}}M\left(T^{-1};\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_1\right)S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}_2}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1\\2&3\end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix}0&-1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\2x+3y\end{bmatrix}$$

então

$$T^{-1}(x,y)=-y+(2x+3y)\,t$$

OU

Como

$$M\left(T^{-1};\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_1\right)=\begin{bmatrix}-1&-1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}$$

e

$$(x,y)=y\,(0,1)+x\,(1,0)$$

e

$$\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\-x-2y\end{bmatrix}$$

então

$$T^{-1}(x,y)=(x+y)\,(1+t)+(-x-2y)\,(1-t)=-y+(2x+3y)\,t$$

e) Como

$$(x,y)=(-y)\,(1,-1)+(x+y)\,(1,0)$$

e

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-y\\x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+y\\x+y\end{bmatrix}$$

então

$$S(x,y)=(2x+y)\,(1-t)+(x+y)\,1=3x+2y+(-2x-y)\,t$$

OU

Como

$$S(1,-1)=1\,(1-t)+0\times1=1-t\qquad\text{e}\qquad S(1,0)=2\,(1-t)+1\times1=3-2t$$

e

$$(x,y)=(-y)\,(1,-1)+(x+y)\,(1,0)$$

então

$$S(x,y)=(-y)\,(1-t)+(x+y)\,(3-2t)=3x+2y+(-2x-y)\,t$$

OU

Como

$$M\left(S;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}\right)=S_{\mathcal{B}_4\to\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}}M\left(S;\mathcal{B}_3;\mathcal{B}_4\right)S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}_3}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}^{-1}=$$

e

$$\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x+2y\\-2x-y\end{bmatrix}$$

então

$$S\left(x,y\right)=3x+2y+\left(-2x-y\right)t$$

f) S é linear,

$$\dim\mathcal{N}\left(S\right)=\text{nul}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=0$$

logo $\mathcal{N}\left(S\right)=\{\mathbf{0}\}\left(=\{(0,0)\}\right)$ e assim S é injectiva. Além disso $\dim\mathbb{R}^2=2=\dim\mathcal{P}_1$ logo S é um isomorfismo por ser linear, injectiva e sobrejectiva.

(**OU** T é linear, $\dim\mathcal{I}\left(S\right)=\text{car}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=2$ logo $\mathcal{T}\left(S\right)=\mathcal{P}_1$ e assim S é sobrejectiva. Além disso $\dim\mathbb{R}^2=2=\dim\mathcal{P}_1$ logo S é um isomorfismo por ser linear, injectiva e sobrejectiva.)

Como

$$S\left(1,-1\right)=1-t\Leftrightarrow\left(1,-1\right)=S^{-1}\left(1-t\right)$$

e

$$S\left(1,0\right)=3-2t\Leftrightarrow\left(1,0\right)=S^{-1}\left(3-2t\right)$$

e

$$a_0+a_1t=\left(-2a_0-3a_1\right)\left(1-t\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(3-2t\right)$$

então

$$S^{-1}\left(a_0+a_1t\right)=\left(-2a_0-3a_1\right)S^{-1}\left(1-t\right)+\left(a_0+a_1\right)S^{-1}\left(3-2t\right)=$$

$$=\left(-2a_0-3a_1\right)\left(1,-1\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(1,0\right)=\left(-a_0-2a_1,2a_0+3a_1\right)$$

OU

Como

$$M\left(S^{-1};\mathcal{B}_4;\mathcal{B}_3\right)=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$$

e

$$M\left(S^{-1};\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1};\mathcal{B}_c^2\right)=S_{\mathcal{B}_3\to\mathcal{B}_c^2}M\left(S^{-1};\mathcal{B}_4;\mathcal{B}_3\right)S_{\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}\to\mathcal{B}_4}=$$

$$=\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -1 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & -2\\ 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -1 & 0\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{cc}-1 & -2\\ 2 & 3\end{array}\right]$$

e

$$\left[\begin{array}{cc}-1 & -2\\ 2 & 3\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}a_0\\ a_1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}-a_0-2a_1\\ 2a_0+3a_1\end{array}\right]$$

então

$$S^{-1}\left(a_0+a_1t\right)=\left(-a_0-2a_1,2a_0+3a_1\right)$$

OU

Como

$$M\left(S^{-1};\mathcal{B}_4;\mathcal{B}_3\right)=\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ 0 & 1\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{cc}1 & -2\\ 0 & 1\end{array}\right]$$

e

$$a_0+a_1t=\left(-a_1\right)\left(1-t\right)+\left(a_0+a_1\right)\times 1$$

e

$$\left[\begin{array}{cc}1 & -2\\ 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}-a_1\\ a_0+a_1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}-2a_0-3a_1\\ a_0+a_1\end{array}\right]$$

então

$$S^{-1}\left(a_0+a_1t\right)=\left(-2a_0-3a_1\right)\left(1,-1\right)+\left(a_0+a_1\right)\left(1,0\right)=$$

$$=\left(-a_0-2a_1,2a_0+3a_1\right)$$

g)

$$\left(S\circ T\right)\left(a_0+a_1t\right)=S\left(T\left(a_0+a_1t\right)\right)=S\left(\frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1,-a_0\right)=$$

$$=3\left(\frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1\right)-2a_0+\left(-2\left(\frac{3}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1\right)+a_0\right)t=$$

$$=\frac{5}{2}a_0+\frac{3}{2}a_1+\left(-2a_0-a_1\right)t$$

$$S\left(1,-1\right)=1-t\Leftrightarrow\left(1,-1\right)=S^{-1}\left(1-t\right)$$

e

$$S\left(1,0\right)=3-2t\Leftrightarrow\left(1,0\right)=S^{-1}\left(3-2t\right)$$

$$S(x,y) = (2x+y)(1-t) + (x+y)1 = 3x + 2y + (-2x-y)t$$

$$T(1+t) = (2,-1) \Leftrightarrow 1+t = T^{-1}(2,-1)$$

e

$$T(1-t) = (1,-1) \Leftrightarrow 1-t = T^{-1}(1,-1)$$

$$T(a_0 + a_1 t) = \left(\frac{3}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_1, -a_0\right).$$

h) $S \circ T$ é um isomorfismo porque é a composta de isomorfismos.

Como

$$(S\circ T)(1+t) = S(T(1+t)) = S(2,-1) = 4-3t \Leftrightarrow 1+t = (S\circ T)^{-1}(4-3t)$$

e

$$(S\circ T)(1-t) = S(T(1-t)) = S(1,-1) = 1-t \Leftrightarrow 1-t = (S\circ T)^{-1}(1-t)$$

e

$$a_0 + a_1 t = (a_0+a_1)(4-3t) + (-3a_0-4a_1)(1-t)$$

então

$$(S\circ T)^{-1}(a_0+a_1t) = (a_0+a_1)(S\circ T)^{-1}(4-3t) + (-3a_0-4a_1)(S\circ T)^{-1}(1-t) =$$

$$= (a_0+a_1)(1+t) + (-3a_0-4a_1)(1-t) =$$

$$= -2a_0 - 3a_1 + (4a_0+5a_1)t$$

OU

Como

$$M\left((S\circ T)^{-1}; \mathcal{B}_4; \mathcal{B}_1\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

e

$$M\left((S\circ T)^{-1}; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}\right) = S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}} M\left((S\circ T)^{-1}; \mathcal{B}_4; \mathcal{B}_1\right) S_{\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1} \to \mathcal{B}_4} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_0 - 3a_1 \\ 4a_0 + 5a_1 \end{bmatrix}$$

então

$$(S \circ T)^{-1}(a_0 + a_1 t) = -2a_0 - 3a_1 + (4a_0 + 5a_1)\, t$$

OU

Como

$$M\left((S \circ T)^{-1}; \mathcal{B}_4; \mathcal{B}_1\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

e

$$a_0 + a_1 t = (-a_1)(1 - t) + (a_0 + a_1) \times 1$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 \\ a_0 + a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \\ -3a_0 - 4a_1 \end{bmatrix}$$

então

$$(S \circ T)^{-1}(a_0 + a_1 t) = (a_0 + a_1)(1 + t) + (-3a_0 - 4a_1)(1 - t) =$$

$$= -2a_0 - 3a_1 + (4a_0 + 5a_1)\, t$$

i)

$$\left(T^{-1} \circ S^{-1}\right)(a_0 + a_1 t) = T^{-1}\left(S^{-1}(a_0 + a_1 t)\right) = T^{-1}\left(S^{-1}(a_0 + a_1 t)\right)$$

$$= T^{-1}(-a_0 - 2a_1, 2a_0 + 3a_1) =$$

$$= -2a_0 - 3a_1 + (4a_0 + 5a_1)\, t$$

4) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a - d = 0 \right\}$. $T : U \to \mathcal{P}_2$ linear tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 + t^2, \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = t + t^2 \qquad \text{e} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 - 2t - t^2.$$

a) Como

$$\dim U = \operatorname{nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

e

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é linearmente independente e está contido em U, então é uma base de U. Assim, sendo T linear,

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\}\right) =$$

$$= L\left(\left\{1+t^2, t+t^2, 1-2t-t^2\right\}\right) = L\left(\left\{1+t^2, t+t^2\right\}\right)$$

e como $\{1+t^2, t+t^2\}$ é linearmente independente logo é base de $\mathcal{I}(T)$. Como

$$\dim \mathcal{N}(T) = 3 - \dim \mathcal{I}(T) = 1$$

e

$$\mathbf{0} = \left(1-2t-t^2\right) - \left(\left(1+t^2\right) - 2\left(t+t^2\right)\right) =$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) - \left(T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) =$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) = T\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

e então $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$.

b)

$$2-2t = \left(1+t^2\right) + \left(1-2t-t^2\right) =$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

e como $\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right)$, então o conjunto solução da equação linear

$$T\left(\begin{bmatrix} d & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2-2t$$

é dado por

$$\left\{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\} + L\left(\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

5) Considere $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ linear tal que

$$T\,(9-2t) = (2,-1) \qquad \text{e} \qquad T\,(-5+t) = (-3,2)\,.$$

a)

$$T(1) = -T\,(9-2t) - 2T\,(-5+t) = -\,(2,-1) - 2\,(-3,2) = (4,-3)$$

$$T(t) = T\,(-5+t) + T\,(5) = (-3,2) + 5\,(4,-3) = (17,-13)$$

$$T\,(a_0 + a_1 t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_c^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 17 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}}_{M\left(T;B_c^{P_1};B_c^2\right)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{[a_0+a_1t]_{B_c^{P_1}}} =$$

$$= (4a_0 + 17a_1, -3a_0 - 13a_1)$$

b) Como

$$\mathcal{N}\left(M\left(T;B_c^{P_1};B_c^2\right)\right) = \{0+0t\} = \{\mathbf{0}\}$$

e

$$(-1,1) = (2,-1) + (-3,2) =$$

$$T\,(9-2t) + T\,(-5+t) = T\,(9-2t-5+t) = T\,(4-t)$$

então o conjunto solução da equação linear $T\,(a_0 + a_1 t) = (-1,1)$ é dado por $\{4-t\}$.

c) Como T é linear e é injectiva pois

$$\mathcal{N}\left(M\left(T;B_c^{P_1};B_c^2\right)\right) = \{0+0t\} = \{\mathbf{0}\}$$

e $\dim \mathcal{P}_1 = \dim \mathbb{R}^2$ então T também é sobrejectiva, sendo assim um isomorfismo.

$$T^{-1}\,(x,y) == \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix}}_{B_c^{P_1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 17 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}^{-1}}_{M\left(T^{-1};B_c^2;B_c^{P_1}\right)} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[(x,y)]_{B_c^2}} =$$

$$= 13x + 17y + (-3x - 4y)\,t.$$

6) Se $\dim U < \infty$ e $T : U \to V$ é linear **então**

$$\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$$

Dem. Seja $n = \dim U$. Ou $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ ou $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$**,** tem-se $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Seja $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base de U. Logo

$$T(B) = \{T(u_1), ..., T(u_n)\}.$$

Vamos provar que $T(B)$ **é uma base de** $I(T)$**.**

Prova de que $T(B)$ **gera** $I(T)$:

Como $U = L(B)$ e T é linear, $\mathcal{I}(T) = T(U) = L(T(B))$ e assim $T(B)$ gera $\mathcal{I}(T)$.

Prova de que $T(B)$ **é LI**:

Seja v tal que $T(B)v = \mathbf{0}$. Como T é linear então $T(Bv) = \mathbf{0}$ e assim $Bv \in \mathcal{N}(T)$. Como $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ então $Bv = 0$ e assim $v = \mathbf{0}$ uma vez que B é LI.

Logo $T(B)$ **é uma base de** $\mathcal{I}(T)$ e assim

$$\dim U = n = 0 + n = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$$

Se $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$**,** seja $k = \dim \mathcal{N}(T)$ e seja $B_1 = \{u_1, ..., u_k\}$ uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo

$$T(B_1) = \{T(u_1), ..., T(u_k)\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Seja $B_2 = \{v_{k+1}, ..., v_n\} \subset U$ tal que $B_1 \cup B_2 = \{u_1, ..., u_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ é uma base de U.

Vamos provar que $T(B_2)$ **é uma base de** $I(T)$**.**

Prova de que $T(B_2)$ **gera** $I(T)$:

Como $U = L(B_1 \cup B_2)$ e T é linear então

$$\mathcal{I}(T) = T(U) = L(T(B_1 \cup B_2)) = L(T(B_1) \cup T(B_2)) = L(T(B_2))$$

e assim $T(B_2)$ gera $\mathcal{I}(T)$.

Prova de que $T(B_2)$ **é LI**:

Seja v tal que $T(B_2)v = \mathbf{0}$. Como T é linear então $T(B_2 v) = \mathbf{0}$ e assim $B_2 v \in \mathcal{N}(T)$. Como $\mathcal{N}(T) = L(B_1)$ então existe w tal que $B_2 v = B_1 w$, isto é $B_2 v - B_1 w = \mathbf{0}$ e assim $v = w = \mathbf{0}$ uma vez que $B_1 \cup B_2$ é LI.

Logo $T(B_2)$ **é uma base de** $\mathcal{I}(T)$ e assim

$$\dim U = n = k + n - k = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$$