**Resolução da ficha de preparação para uma parte do 1º teste de Álgebra Linear**
LEGM - MEC

**1)** $[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \alpha & 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & -1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{-\alpha L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right].$

Se $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ então $\operatorname{car} A = 3 = \operatorname{car}[A \mid B] < 4$ e o sistema é possível e indeterminado.

Se $\alpha = 0$ então $\operatorname{car} A = 2 = \operatorname{car}[A \mid B] < 4$ e o sistema é possível e indeterminado.

Se $\alpha = 1$ então $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ então
$\operatorname{car} A = 2 = \operatorname{car}[A \mid B] < 4$ e o sistema é possível e indeterminado.

Se $\alpha = -1$ então $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ então
$\operatorname{car} A = 2 < 3 = \operatorname{car}[A \mid B]$ e o sistema é impossível.

Assim, o sistema é impossível se e só se $\alpha = -1$.

Se $\alpha = 0$ então como se tem $\begin{cases} y = -1 \\ z = -1, \end{cases}$ a solução geral é dada por: $\{(x,-1,-1,w) : x, w \in \mathbb{R}\}$.

**2)** $3\left(A^T - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} A \operatorname{tr} I \underset{\operatorname{tr} I = 3}{\Leftrightarrow} \left(A^T - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left(I - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ uma vez que

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1 \to L_1 \\ -L_2 \to L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

**3)** Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A$ e $B$ são invertíveis e simétricas.
Vejamos que $(AB)^{-1}$ é simétrica $\Rightarrow AB = BA$.

$$AB = \left((AB)^{-1}\right)^{-1} \underset{(AB)^{-1} \text{ simétrica}}{=} \left(\left((AB)^{-1}\right)^T\right)^{-1} = \left(\left((AB)^T\right)^{-1}\right)^{-1} = (AB)^T = B^T A^T \underset{A \text{ e } B \text{ simétricas}}{=} BA.$$

Vejamos que $AB = BA \Rightarrow (AB)^{-1}$ é simétrica.
$\left((AB)^{-1}\right)^T = \left((AB)^T\right)^{-1} = \left(B^T A^T\right)^{-1} \underset{A \text{ e } B \text{ simétricas}}{=} (BA)^{-1} \underset{AB=BA}{=} (AB)^{-1}$

Logo $(AB)^{-1}$ é simétrica $\Leftrightarrow AB = BA$.