Produtos internos (Axiomas) com $\mathbb{R}$ e com $\mathbb{C}$

Norma de u: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$

Matriz de Gram $G_{\mathcal{B}}$

Duas Desigualdades: Cauchy-Schwarz e triangular

Ângulo entre $\underset{\neq \mathbf{0}}{u}$ e $\underset{\neq \mathbf{0}}{v}$: $\theta = \text{arccos}\,\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$

Projecção ortogonal de v sobre $\underset{\neq \mathbf{0}}{u}$: $\text{proj}_u\, v = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}u$

Bases ortogonais e ortonormadas

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Projecção ortogonal sobre U: P_U

Complemento ortogonal de U : $U^{\perp}$

Distância

Definição. Seja V espaço um linear real. Um **produto interno** em V é uma aplicação

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(u, v) \ \ \to \langle u, v \rangle$$

tal que

(i) Linearidade: $\forall v \in V$ (fixo) $\forall u, w \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha u + \beta w, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle w, v \rangle$$

(ii) Simetria: $\forall u, v \in V \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(iii) Positividade: $\forall u \in V \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \langle u, u \rangle > 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$.

Observação. Um produto interno num espaço linear real diz-se uma forma **bilinear**, **simétrica** e **definida positiva**.

Definição. Seja V espaço um linear complexo. Um **produto interno** em V é uma aplicação

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$(u, v) \;\; \to \langle u, v \rangle$$

tal que

(i) Linearidade conjugada: $\forall v \in V$ (fixo) $\forall u, w \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle \alpha u + \beta w, v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle w, v \rangle$$

(ii) Simetria conjugada: $\forall u, v \in V \;\; \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

(iii) Positividade: $\forall u \in V \setminus \{\mathbf{0}\} \;\; \langle u, u \rangle > 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$.

Observação. Um produto interno num espaço linear complexo diz-se uma forma **sesquilinear**, **hermitiana** e **definida positiva**.

Exemplo.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Um produto interno (real) em $C([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f contínua em $[a,b]\}$

$$\langle , \rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,g) \quad \longrightarrow \langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

$$\langle \lambda f_1 + \mu f_2, g \rangle = \int_a^b (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))\, g(x)\, dx =$$

$$= \lambda \int_a^b f_1(x)\, g(x)\, dx + \mu \int_a^b f_2(x)\, g(x)\, dx =$$

$$\lambda \langle f_1, g \rangle + \mu \langle f_2, g \rangle$$

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, f(x)\, dx = \langle g,f \rangle$$

$$\langle f,f \rangle = \int_a^b (f(x))^2\, dx > 0 \qquad \forall f \neq \mathbf{0}$$

Definição. Seja V um espaço linear com um produto interno.

(i) Seja $u \in V$. Chama-se **norma** de u a $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

(ii) Sejam $u, v \in V$. u e v dizem-se **ortogonais** se e só se $\langle u, v \rangle = 0$.

(iii) Seja S um subconjunto não vazio de V. S diz-se **ortogonal** se e só se $\forall u, v \in S \;\; u \neq v \Rightarrow \; \langle u, v \rangle = 0$.

(iv) Seja S um subconjunto não vazio de V. S diz-se **ortonormado** se e só S se fôr ortogonal e $\forall u \in S$ $\|u\| = 1$.

Teorema. Seja V um espaço linear real com um produto interno. $\forall u, v \in V$

$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$ (teorema de **Pitágoras**)

Definição. Seja V um espaço linear com um produto interno. Sejam $u, v \in V$ com $u \neq \mathbf{0}$. A **projecção ortogonal** de v sobre $u \neq \mathbf{0}$ é

$$\mathsf{proj}_u\, v = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} u$$

Num espaço linear real com um produto interno:

$$\mathsf{proj}_u\, v = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} u$$

Observação. Seja $u \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ (fixo). A transformação

$$\mathsf{proj}_u : V \to V$$

$$v \to \mathsf{proj}_u\, v$$

é linear.

Teorema. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Seja V um espaço linear com um produto interno. $\forall u, v \in V$

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

e $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \, \|v\| \Leftrightarrow \{u, v\}$ é linearmente dependente

Teorema. Desigualdade triangular: Seja V um espaço linear com um produto interno. $\forall u, v \in V$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Definição. Seja V um espaço linear com um produto interno. Sejam $u, v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. O **ângulo** θ entre u e v é definido por $\theta = \text{arccos} \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

Observação. (i) $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|}$

(ii) $\theta = \frac{\pi}{2} \; \Leftrightarrow \; (u \text{ e } v \text{ ortogonais})$

(iii) $\text{proj}_u \, v = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} u = \|v\| \, \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} \dfrac{1}{\|u\|} u = \|v\| \cos\theta \left(\dfrac{1}{\|u\|} u\right)$

Observação. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ uma base ordenada de V espaço linear real. Sejam $u, v \in V$

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \left\langle w_i, w_j \right\rangle =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}}_{([u]_{\mathcal{B}})^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle w_1, w_1\rangle & \ldots & \langle w_1, w_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_n, w_1\rangle & \ldots & \langle w_n, w_n\rangle \end{bmatrix}}_{G_{\mathcal{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}}}$$

$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ $((u, v) \to \langle u, v\rangle)$ é um produto interno em V **se e só se** $G_{\mathcal{B}}$ é **simétrica** ($G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}}^T$) e **definida positiva** ($([u]_{\mathcal{B}})^T G_{\mathcal{B}} [u]_{\mathcal{B}} > 0$, para todo o $u \neq \mathbf{0}$). A **linearidade** é óbvia.

À matriz $G_{\mathcal{B}}$ chama-se **matriz da métrica** ou de **Gram** do produto interno.

Observação. Ver-se-á que sendo $G_{\mathcal{B}}$ simétrica:

$$\langle u, u\rangle = ([u]_{\mathcal{B}})^T G_{\mathcal{B}} [u]_{\mathcal{B}} > 0, \quad \forall u \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{(todos os valores próprios de } G_{\mathcal{B}} \text{ são positivos)}$$

Teorema. Seja V um espaço linear **real** tal que **dim** $V = n$. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ uma base ordenada de V. Ter-se um **produto interno em** V equivale a ter-se $\forall u, v \in V$

$$\langle u, v\rangle = ([u]_{\mathcal{B}})^T G_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}}_{([u]_{\mathcal{B}})^T} G_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}}}$$

com

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1\rangle & \dots & \langle w_1, w_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_n, w_1\rangle & \dots & \langle w_n, w_n\rangle \end{bmatrix}$$

simétrica $(G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}}^T)$ e todos os seus valores próprios são positivos.

Definição. Um **espaço euclidiano** é um espaço linear real de dimensão finita com um produto interno.

Teorema. Seja V um espaço linear **complexo** tal que $\dim V = n$. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ uma base ordenada de V. Ter-se um **produto interno em** V equivale a ter-se $\forall u, v \in V$

$$\langle u, v\rangle = ([u]_{\mathcal{B}})^H \, G_{\mathcal{B}} \, [v]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\alpha_1} & \dots & \overline{\alpha_n} \end{bmatrix}}_{([u]_{\mathcal{B}})^H} G_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}}}$$

com

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle w_1, w_1\rangle & \dots & \langle w_1, w_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_n, w_1\rangle & \dots & \langle w_n, w_n\rangle \end{bmatrix}$$

hermitiana ($G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}}^H = \overline{G_{\mathcal{B}}}^T$) e todos os seus valores próprios são positivos.

Definição. Um **espaço unitário** é um espaço linear complexo de dimensão finita com um produto interno.

Exemplo.

O produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = u^T v$$

Observação. No produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ tem-se $G_{\mathcal{B}_c} = I,\ G_{\mathcal{B}_c} = G_{\mathcal{B}_c}^T,$ valores próprios de $G_{\mathcal{B}_c}$: $1 > 0$

Exemplo.

O produto interno usual em $\mathbb{C}^n$. $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle u, v \rangle = u^H v$$

Observação. No produto interno usual em $\mathbb{C}^n$ tem-se $G_{\mathcal{B}_c} = I,\ G_{\mathcal{B}_c} = G_{\mathcal{B}_c}^H,$ valores próprios de $G_{\mathcal{B}_c}$: $1 > 0$

Observação. Em $\mathbb{R}^n$ (ou em $\mathbb{C}^n$) o produto interno usual é aquele em relação ao qual a $\underbrace{\text{base canónica é ortonormada}}_{G_{\mathcal{B}_c}=I}$.

Exemplo. O produto interno usual em $\mathcal{P}_2$

$$\langle , \rangle : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$$

$$\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2\right) \ \to$$

$$\to \left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \right\rangle$$

$$= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{\left(\left[a_0+a_1t+a_2t^2\right]_{\mathcal{B}_c}\right)^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G_{\mathcal{B}_c}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\left[b_0+b_1t+b_2t^2\right]_{\mathcal{B}_c}} .$$

De facto, $\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2} = \left\{1, t, t^2\right\}$ é ortonormada.

Exemplo. O produto interno usual em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\langle , \rangle : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$(A,B) \ \to \langle A,B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \operatorname{tr}\left(AB^T\right)$$

De facto, $\mathcal{B}_c^{m\times n}$ é ortonormada.

O produto interno usual em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{B} \right\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{ij} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\left([A]_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}}\right)^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix}}_{[B]_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}}}$$

Com $\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
ortonormada.

Exemplo.

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

produto interno usual (produto escalar) em $\mathbb{R}^2$

$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle$$

$$\left\langle \lambda(x_1, x_2) + \mu(x_1^{'}, x_2^{'}), (y_1, y_2) \right\rangle =$$

$$= \lambda \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle + \mu \left\langle (x_1^{'}, x_2^{'}), (y_1, y_2) \right\rangle$$

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = (x_1)^2 + (x_2)^2 \geq 0$$

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$$

Exemplo.

$\langle , \rangle$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

produto interno não usual em $\mathbb{R}^2$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 2 x_2 y_2$$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle$$

$$\left\langle \lambda (x_1, x_2) + \mu (x_1^{'}, x_2^{'}), (y_1, y_2) \right\rangle =$$

$$= \lambda \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle + \mu \left\langle (x_1^{'}, x_2^{'}), (y_1, y_2) \right\rangle$$

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - 2 x_1 x_2 + 2 x_2^2 =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2)^2 \geq 0$$

$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$

Exemplo.

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica e

os seus valores próprios: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ são todos positivos

Assim, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$$

é um produto interno.

Observação. (i) Sendo $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases ordenadas de um espaço euclidiano V. Se se tiver

$$\langle u, v\rangle = \left([u]_{\mathcal{B}_1}\right)^T G_{\mathcal{B}_1} [v]_{\mathcal{B}_1}$$

e também

$$\langle u, v\rangle = \left([u]_{\mathcal{B}_2}\right)^T G_{\mathcal{B}_2} [v]_{\mathcal{B}_2}$$

ou seja:

$$\langle u, v\rangle = \left([u]_{\mathcal{B}_2}\right)^T G_{\mathcal{B}_2} [v]_{\mathcal{B}_2} =$$

$$= \left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} [u]_{\mathcal{B}_1}\right)^T G_{\mathcal{B}_2} S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} [v]_{\mathcal{B}_1} =$$

$$= \left([u]_{\mathcal{B}_1}\right)^T \left(S^T_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} G_{\mathcal{B}_2} S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\right) [v]_{\mathcal{B}_1}$$

então

$$S^T_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} G_{\mathcal{B}_2} S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = G_{\mathcal{B}_1}$$

(ii) Uma base $\mathcal{B}$ é ortonormada se e só se $G_{\mathcal{B}} = I$.

Teorema. Num espaço euclidiano ou num espaço unitário, existe um único produto interno para o qual uma sua base seja ortonormada.

Exemplo. Seja $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$. O único produto interno em $\mathbb{R}^2$ para o qual a base $\mathcal{B}$ é ortonormada é dado por

$$\langle (x_1, x_2)\,, (y_1, y_2)\rangle =$$

$$= \left([(x_1,x_2)]_{\mathcal{B}}\right)^T G_{\mathcal{B}} \,[(y_1,y_2)]_{\mathcal{B}}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left([(x_1,x_2)]_{\mathcal{B}_c^2}\right)^T G_{\mathcal{B}_c^2} \,[(y_1,y_2)]_{\mathcal{B}_c^2}$$

com $\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}$

Definição. A aplicação $\|\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** se e só se:

(i) $\forall u \in V \setminus \{\mathbf{0}\}\quad \|u\| > 0$ (**Positividade**)

(ii) $\forall u \in V, \forall \lambda$ escalar $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$ (**Homogeneidade**)

(iii) $\forall u, v \in V\quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**Desigualdade triangular**)

Definição. Um **espaço normado** é um espaço linear com uma norma.

Teorema. Um produto interno pode ser obtida de uma norma

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$

se e só se essa norma satisfizer a **lei do paralelogramo:**

$$\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2$$

Observação. Exemplo de uma norma que não dá origem a um produto interno

$$\|\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\|(\alpha_1, \alpha_2)\| = |\alpha_1| + |\alpha_2|$$

Teorema. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ uma base ortogonal de um espaço linear V de dimensão finita com um produto interno. Seja $u \in V$. Então as coordenadas de u em $\mathcal{B}$ são dadas por

$$[u]_{\mathcal{B}} = \frac{\langle w_i, u\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} = \frac{\langle w_i, u\rangle}{\|w_i\|^2} \text{ e tem-se } u = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{proj}_{w_i} u.$$

Além disso, se $\mathcal{B}$ fôr ortonormada então $[u]_{\mathcal{B}} = \langle w_i, u\rangle$ e assim

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle w_i, u\rangle \langle w_i, v\rangle \quad \text{e} \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle w_i, u\rangle^2}.$$

Teorema. Seja V um espaço linear de dimensão finita com um produto interno. Então

$$(\dim V = n \quad \text{e} \quad \mathbf{0} \notin S \subset V,\ S = \{w_1, ..., w_n\} \text{ ortogonal})$$

$$\Downarrow$$

$$S \text{ é base ortogonal de } V$$

Teorema. Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V um espaço linear com um produto interno. Seja

$$\underbrace{\{v_1, v_2, ..., v_k\}}_{\text{linearmente independente}} \subset V.$$

Sejam

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \mathsf{proj}_{w_1} v_2 \\ &\dots \\ w_k &= v_k - \mathsf{proj}_{w_1} v_k - \dots - \mathsf{proj}_{w_{k-1}} v_k \end{aligned}$$

então:

(i) $L(\{w_1, ..., w_i\}) = L(\{v_1, ..., v_i\}) \ \ \forall i = 1, ..., k$

(i) $\{w_1, ..., w_k\}$ é base ortogonal de $L(\{v_1, ..., v_k\})$

(ii) $\left\{ \frac{1}{\|w_1\|} w_1, ..., \frac{1}{\|w_k\|} w_k \right\}$ é base ortonormada de $L(\{v_1, ..., v_k$

Exemplo. $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual

$$U = L(\{(1,1,1),(1,2,3),(0,-1,-2)\})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\}$$

Uma base de U: $\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$ $\dim U = 2$

$w_1 = (1,0,-1)$

$w_2 = (0,1,2) - \mathrm{proj}_{(1,0,-1)}(0,1,2) =$

$= (0,1,2) - \frac{0+0+(-2)}{1^2+0^2+(-1)^2}(1,0,-1) = (1,1,1)$

Uma base ortogonal de U: $\{(1,0,-1),(1,1,1)\}$

Uma base ortonormada de U: $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

Definição. Seja V um espaço linear com um produto interno. Seja $U \subset V$. O **complemento ortogonal** de U é definido por

$$U^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \;\; \forall u \in U\}.$$

Teorema. Seja V um espaço linear com um produto interno. Seja U um subespaço de V.

(i)

$$\{v_1, ..., v_n\} \text{ base de } U$$

$$\Downarrow$$

$$U^{\perp} = \{v \in V : \langle v, v_1 \rangle = ... = \langle v, v_n \rangle = 0\}$$

(ii) $U^{\perp}$ é subespaço de V e $U^{\perp} \cap U = \{\mathbf{0}\}$

(iii) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \;\; \forall u \in U^{\perp}\right\}$ logo

$$U \subset \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$$

Teorema. Seja V um espaço linear com um produto interno. Sejam S_1 e S_2 subconjuntos de V. Então

$$S_1 \subset S_2 \Rightarrow (S_2)^{\perp} \subset (S_1)^{\perp}.$$

Teorema. Seja V um espaço linear de dimensão finita com um produto interno. Sejam U_1 e U_2 subespaços de V. Então

$$(U_1 + U_2)^{\perp} = (U_1)^{\perp} \cap (U_2)^{\perp}$$

e

$$(U_1 \cap U_2)^{\perp} = (U_1)^{\perp} + (U_2)^{\perp}$$

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(i) $\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{L}(A)$.

(ii) Com o **produto interno usual** em $\mathbb{R}^n$ tem-se

$$(\mathcal{L}(A))^\perp = \mathcal{N}(A).$$

Teorema. Seja V um espaço linear com um produto interno. Seja U um subespaço de V de dimensão finita. Então $V = U \oplus U^\perp$ e $V = \left(U^\perp\right)^\perp \oplus U^\perp$.

Teorema. Seja V um espaço linear de dimensão finita com um produto interno. Seja U um subespaço de V. Então $U = \left(U^\perp\right)^\perp$

Teorema.

(i) Considerando o **produto interno usual em** $\mathbb{R}^n$ tem-se $(\mathcal{L}(A))^\perp = \mathcal{N}(A)$ e $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{L}(A)$.

(ii) Com um **produto interno não usual em** $\mathbb{R}^n$ tem-se $(\mathcal{L}(A))^\perp = \mathcal{N}(AG_{\mathcal{B}_c})$.

Exemplo. Seja

$$U = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$$

e considere-se o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$.

Uma base ortogonal de U: $\{(1,1,1)\}$.

Tem-se $\dim U^{\perp} = 2$ e

$$U^{\perp} = \mathcal{N}\left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\right) =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$$

Uma base de $U^{\perp}$: $\{(1,-1,0),(0,-1,1)\}$.

Uma base ortogonal de $U^{\perp}$: $\{(-2,1,1),(0,-1,1)\}$ (Gram-Schmidt).

Tem-se

$$U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = \mathcal{N}\left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right]\right).$$

Teorema. Seja V um espaço linear. Sejam U e W subespaços de V tais que $V = U \oplus W$. Então existe uma única $T : V \to V$ a satisfazer em simultâneo as seguintes condições

(i) T é linear,

(ii) $T \circ T = T$,

(iii) $\mathcal{I}(T) = W$ e $\mathcal{N}(T) = U$.

Dem. Para provar a existência basta definir T do seguinte modo:

$$T(u + w) = w.$$

Unicidade: $T(u + w) = T(u) + T(w) = T(w) = T'(w) = T'(u) + T'(w) = T'(u + w)$, logo $T = T'$.

Definição. Seja V um espaço linear. Uma transformação linear $T : V \to V$ chama-se **projecção** se e só se satisfizer $T \circ T = T$.

Observação. A projecção nas condições do teorema anterior é com frequência conhecida como a projecção sobre U ao longo de W (ou de forma paralela a W).

Teorema. Seja V um espaço linear de dimensão finita com um produto interno. Seja U um subespaço de V. Então existem $P_U : V \to V$ e $P_{U^\perp} : V \to V$ únicas a satisfazer em simultâneo as seguintes condições

(i) P_U e $P_{U^\perp}$ são lineares,

(ii) $P_U = P_U \circ P_U$ e $P_{U^\perp} = P_{U^\perp} \circ P_{U^\perp}$,

(iii) $\underbrace{\mathcal{I}(P_U)}_{=U} = \left(\underbrace{(\mathcal{N}(P_U))}_{=U^\perp} \right)^\perp$ e $\underbrace{\mathcal{I}\left(P_{U^\perp}\right)}_{=U^\perp} = \left(\underbrace{\left(\mathcal{N}\left(P_{U^\perp}\right)\right)}_{=U} \right)^\perp$.

Deste modo, $\forall v \in V$ existem $u = P_U(v) \in U$ e $w = P_{U^\perp}(v) \in U^\perp$ únicos tais que

$$v = u + w = P_U(v) + P_{U^\perp}(v) = \left(P_U + P_{U^\perp}\right)(v).$$

Isto é, tem-se

$$I = P_U + P_{U^\perp}.$$

Dem. Como $V = U \oplus U^{\perp}$ então $\forall v \in V$ existem $u \in U$ e $w \in U^{\perp}$ únicos tais que $v = u + w$. Sejam $P_U : V \to V$ e $P_{U^{\perp}} : V \to V$ tais que

$$P_U(u+w) = u \quad \text{e} \quad P_{U^{\perp}}(u+w) = w.$$

Do teorema anterior conclui-se então o pretendido.

Definição. Seja V um espaço linear de dimensão finita com um produto interno. Seja U um subespaço de V. Às aplicações $P_U : V \to V$ e $P_{U^{\perp}} : V \to V$ referidas no teorema anterior, chamamos respectivamente **projecção ortogonal de V sobre U** e **projecção ortogonal de V sobre $U^{\perp}$**.

Teorema. Seja V um espaço linear de dimensão finita com um produto interno. Seja U um subespaço de V. Sejam $v \in V$, $\{w_1, ..., w_l\}$ uma base ortogonal de U e $\{u_1, ..., u_k\}$ uma base ortogonal de $U^\perp$. Então

(i) $\{w_1, ..., w_l, u_1, ..., u_k\}$ é uma base ortogonal de V.

(ii) $P_U(v) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\langle w_i, v\rangle}{\|w_i\|^2} w_i = \sum_{i=1}^{l} \mathrm{proj}_{w_i} v$

(iii) $P_{U^\perp}(v) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left\langle u_j, v\right\rangle}{\left\|u_j\right\|^2} u_j = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{proj}_{u_j} v$

(iv) $\langle P_U(u), v\rangle = \langle u, P_U(v)\rangle$, $\forall u, v \in V$

(v) $\left\langle P_{U^\perp}(u), v\right\rangle = \left\langle u, P_{U^\perp}(v)\right\rangle$, $\forall u, v \in V$

(vi) $\|u\|^2 = \|P_U(u)\|^2 + \left\|P_{U^\perp}(u)\right\|^2$, $\forall u \in V$ (teorema de Pitágoras)

Teorema. Seja V um espaço linear de dimensão finita com um produto interno. Seja U um subespaço de V. Seja $v \in V$. O **elemento de U mais próximo de v é a projecção ortogonal $P_U(v)$ de v sobre U.** De facto, tem-se

$$\|v - P_U(v)\| \leq \|v - u\|,$$

para todo o $u \in U$, e a igualdade verifica-se se e só se $u = P_U(v)$.

Dem.

$$\|v - P_U(v)\|^2 = \|v - u + u - P_U(v)\|^2 =$$

$$= \|v - u + P_U(u) - P_U(v)\|^2 = \|(v - u) - P_U(v - u)\|^2 =$$

$$= \left\|P_{U^\perp}(v - u)\right\|^2 \leq \left\|P_{U^\perp}(v - u)\right\|^2 + \|P_U(v - u)\|^2 \underset{\text{Pitágoras}}{=}$$

$$= \|v - u\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|v - P_U(v)\| \leq \|v - u\|.$$

Definição. Seja V um espaço linear de dimensão finita com um produto interno.

(i) Distância d entre um ponto $v \in V$ e um subespaço U:

$$d(v, U) = \|v - P_U(v)\| = \left\|P_{U^\perp}(v)\right\| = \left\|P_{U^\perp}(v - \mathbf{0})\right\|$$

(ii) Distância d entre um ponto $v \in V$ e um k-plano $\mathcal{P} = \{q\} + U$:

$$d(v, \mathcal{P}) = \left\|P_{U^\perp}(v - q)\right\|$$

(iii) Distância entre dois k-planos paralelos $\mathcal{P}_1 = \{a\} + U$ e $\mathcal{P}_2 = \{b\} + U$:

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \left\|P_{U^\perp}(a - b)\right\|$$