Avaliação e programa de Álgebra Linear

1^o Teste (**21 de Março**): Sistemas de equações lineares e matrizes. Espaços lineares.

2^o Teste (**2 de Maio**): Matriz de mudança de base. Transformações lineares.

3^o Teste (**2 de Junho**): Determinantes. Valores próprios e vectores próprios. Diagonalização. Produtos internos. Ortogonalização. Aplicações.

Teste de Recuperação (**22 de Junho**): T1+T2 ou T3 ou Exame

Horários para esclarecimento de dúvidas: 2^a e 4^a feiras às 10:30; 5^a feiras às 11:30

Local: sala P2 no Piso 1 do Pavilhão de Matemática

Definição

Equação linear a uma variável x

$$ax = b$$

Equação linear a n **variáveis** $x_1, ..., x_n$

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$$

Sistema de m **equações lineares a** n **variáveis** $x_1, ..., x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz dos termos independentes do sistema:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada do sistema:

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

Observação

As **operações elementares**

$$E_i \leftrightarrow E_j$$

$$\alpha E_i \rightarrow E_i \quad\quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha E_i + E_j \rightarrow E_j$$

aplicadas ao sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

correspondem às **operações elementares**

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$\alpha L_i \rightarrow L_i \quad\quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha L_i + L_j \rightarrow L_j$$

aplicadas à **matriz aumentada** $[A \mid B]$

Definição

Uma **matriz** diz-se **em escada de linhas** se**:**

(i) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) estão por baixo das linhas não nulas;

(ii) Por baixo (e na mesma coluna) do primeiro elemento não nulo de cada linha e por baixo dos elementos nulos anteriores da mesma linha, todas as entradas são nulas. Esse primeiro elemento não nulo de cada linha tem o nome de **pivot**.

Exemplos de matrizes em escada de linhas

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de eliminação de Gauss

Objectivo: permitir classificar e resolver sistemas de equações lineares

Execução: uso sucessivo das operações elementares

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$\alpha L_i + L_j \rightarrow L_j \quad \text{com} \quad i < j$$

necessárias à transformação da matriz aumentada inicial $[A \mid B]$ numa **matriz em escada de linhas equivalente**, ou seja, correspondente ao um sistema equivalente (que tenha o mesmo conjunto solução) ao sistema inicial.

Exemplos de matrizes em escada de linhas

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos de matrizes em escada reduzida de linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição

Matrizes em escada reduzida de linhas são matrizes em escada de linhas em que**:**

(i) Os pivots são todos iguais a 1

(ii) Todas as colunas que contêm os pivots, têm todas as restantes entradas iguais a 0, com excepção desses pivots.

Teorema

Sendo A uma matriz qualquer do tipo $m \times n$ e sendo B e C duas matrizes em escada reduzida de linhas obtidas de A então tem-se $B = C$. Existe um **única** matriz em escada reduzida de linhas obtida de A (por aplicação do Método de eliminação de Gauss**).**

Suponhamos que $B \neq C$

Por exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em geral:

$$B' = \left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & \mathbf{b}' \\ O & \mathbf{0} \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad B' = \left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & 0 \\ & 1 \\ O & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$$

$$C' = \left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & \mathbf{c}' \\ O & \mathbf{0} \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad C' = \left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & 0 \\ & 1 \\ O & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$$

Como os sistemas correspondentes a B' e a C' são equivalentes (têm o mesmo conjunto solução) então:

ou $\mathbf{b}' = \mathbf{c}'$ e ambos têm a mesma solução única ou são ambos impossíveis.

Logo $B' = C'$ o que é uma contradição.

Observação

(i) O **n^o de pivots** de uma qualquer matriz em escada de linhas obtida de A é **igual** ao **n^o de pivots** da matriz em escada reduzida de linhas obtida de A.

(ii) O **n^o de colunas sem pivot** de uma qualquer matriz em escada de linhas obtida de A é **igual** ao **n^o de colunas sem pivot** da matriz em escada reduzida de linhas obtida de A.

Definição

Chama-se **característica** de A (car A) ao **n^o de pivots** de uma matriz em escada de linhas obtida de A.

Chama-se **nulidade** de A (nul A) ao **n^o de colunas sem pivot** de uma matriz em escada de linhas obtida de A.

Observação

(i) car A = n^o de linhas não nulas da matriz em escada obtida de A

(ii) $0 \leq \text{car}\, A \leq \min\{m, n\}$ $\qquad$ $\text{car}\, A + \text{nul}\, A = n$

Exemplos

$$A = \left[\begin{array}{cc} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pivots de A: 4, $\quad$ car $A = 1$, $\quad$ nul $A = 1$

$$B = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

Pivots de B: 1 e -5, $\quad$ car $B = 2$, $\quad$ nul $B = 2$

$$C = \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pivots de C: 2, -3 e -5, $\quad$ car $C = 3$, $\quad$ nul $C = 2$

Observação

Seja A a matriz (do tipo $m \times n$) dos coeficientes de um sistema.

Seja $[A \mid B]$ a matriz aumentada desse sistema.

(i) n^o de colunas de $A =$ n^o total de variáveis do sistema $= n$

(ii) car $A =$ n^o de pivots da matriz em escada obtida de $A =$ n^o de incógnitas não livres $=$ n^o de linhas não nulas da matriz em escada obtida de A

(iii) nul $A =$ n^o de colunas sem pivots $=$ n^o de incógnitas livres $=$ grau de indeterminação do sistema

Exemplo de sistema possível e determinado

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Exemplo de sistema possível e indeterminado

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Exemplo de sistema impossível

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Teorema

$A \quad m \times n$

Se $\text{car}\, A = \text{car}\, [A \mid B] = n$ então o sistema é **possível e determinado** (tem uma única solução).

Se $\text{car}\, A = \text{car}\, [A \mid B] < n$ então o sistema é **possível e indeterminado** (tem mais do que uma solução).

Se $\text{car}\, A < \text{car}\, [A \mid B]$ então o sistema é **impossível** (não tem solução).

Observação

Segue-se a resolução do sistema pelo método de substituição

Exemplo

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 6 \\ 3y + 3z = 6 \end{cases} \quad \overset{?}{\Leftrightarrow} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \underset{(-1)L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\underset{\left(-\frac{3}{2}\right)L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

car $A =$ car $[A \mid B] = 3 = n$ (n^o total de variáveis), o sistema diz-se **possível e determinado (solução única).**

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 2y + z = 3 \\ \frac{3}{2}z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Conjunto solução ou solução geral:

$CS = \{(2, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \frac{1}{5}L_2 \rightarrow L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\underset{-L_1+L_2 \rightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\underset{3L_2+L_3 \rightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

car A $=$ car $[A \mid B] = 2 < 4 = n$, o sistema diz-se **possível e indeterminado** (mais do que uma solução**).**

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y - z + 5w = -7 \\ -z + 3w = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3y - 2w - 5 \\ z = 3w + 2 \end{array}\right.$$

Conjunto solução ou solução geral:

$$CS = \{(-3y - 2w - 5, y, 3w + 2, w) : y, w \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

Exemplo

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha^2-5 & \alpha \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow}$

$$\underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & (\alpha-2)(\alpha+2) & \alpha-2 \end{array}\right].$$

Se $\alpha = 2$ então $\operatorname{car} A = \operatorname{car}[A \mid B] = 2 < 3 = n$ e o sistema diz-se **possível e indeterminado**.

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ -y - 2z = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3z + 1 \\ y = -2z + 1 \end{array}\right.$$

a solução geral do sistema é:

$$\{(3z+1, -2z+1, z) : z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

Se $\alpha = -2$ então $\operatorname{car} A = 2 < 3 = \operatorname{car}[A \mid B]$ e o sistema **não tem solução** e diz-se **impossível**.

Se $\alpha \neq -2$ e $\alpha \neq 2$, então $\operatorname{car} A = \operatorname{car}[A \mid B] = 3 = n$ e o sistema diz-se **possível e determinado** (tem **solução única).** $CS = \left\{\left(\frac{\alpha+5}{\alpha+2}, \frac{\alpha}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}\right)\right\} \subset \mathbb{R}^3$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] \qquad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Se $m = n$ $\quad A$ **matriz quadrada**

a_{11}, $a_{22}, ...,$ a_{nn} : **diagonal principal** de A.

Se $m \neq n$ $\quad A$ **matriz rectangular**.

matriz linha i de A: $\quad \left[\begin{array}{cccc} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{array} \right]$

matriz coluna j de A: $\quad \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \right]$

matriz nula $\mathbf{0}_{m \times n}$ ou $\mathbf{0}$

matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matriz identidade I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definição

Uma matriz (real) A do tipo $m \times n$ é uma aplicação:

$$\begin{array}{rcl} A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i, j) & \longrightarrow & a_{ij} \end{array}$$

Notação $\qquad \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \qquad\qquad \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$

Definição $\qquad A = (a_{ij})_{m \times n} \qquad B = (b_{ij})_{p \times q}$

$A = B$ se $m = p \quad n = q \quad a_{ij} = b_{ij}$

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ é } 2 \times 2, \qquad B \text{ é } 2 \times 4, \qquad C \text{ é } 1 \times 3$$

$$a_{21} = -2, \qquad b_{13} = 3, \qquad c_{12} = 0$$

Definição $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $B = (b_{ij})_{m\times n}$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad C + D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definição $\quad \alpha$ escalar $\quad A = (a_{ij})_{m\times n}$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

Notação $\quad -A = (-1)A$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad -2A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 6 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Observação

$$1A = A \qquad\qquad 0A = \mathbf{0}$$

Definição

$$A - B = A + (-B)$$

Teorema

A, B, C e D matrizes de tipos apropriados, α e β escalares.

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$$

$$A + B = B + A = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad B = -A$$

$$\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A$$

$$(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$$

$$\underbrace{A + \ldots + A}_{n \text{ vezes}} = nA.$$

$$\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

Definição

$$A = (a_{ij})_{m\times p} \qquad B = (b_{ij})_{p\times n}$$

$$AB = \Big(a_{i1}b_{1j} + ... + a_{ip}b_{pj}\Big)_{m\times n} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[3 \times (-1) + 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \left(-\sqrt{2}\right)\right] = \left[-\sqrt{2} - 2\right]$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1) \times 3 & (-1) \times 2 & (-1) \times 1 \\ \frac{1}{2} \times 3 & \frac{1}{2} \times 2 & \frac{1}{2} \times 1 \\ \left(-\sqrt{2}\right) \times 3 & \left(-\sqrt{2}\right) \times 2 & \left(-\sqrt{2}\right) \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -3\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Definição $A_{n\times n}$ $\quad A^p = \underbrace{A...A}_{p \text{ vezes}}$ $\quad A^0 = I \ \ (A \neq \mathbf{0})$

Observação

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} (a_{11})^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_{22})^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (a_{nn})^p \end{bmatrix}$$

Observação. Em geral $AB \neq BA$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação $CD = \mathbf{0} \not\Rightarrow (C = \mathbf{0}$ ou $D = \mathbf{0})$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad CD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Teorema A, B, C e D matrizes de tipos apropriados, α e β escalares.

$$A\left(BC\right) = \left(AB\right)C$$

Se A fôr quadrada $\left(A^m\right)^n = A^{mn}$

$$A\left(B+C\right) = AB + AC$$

$$\left(B+C\right)D = BD + CD$$

$$\alpha\left(AB\right) = \left(\alpha A\right)B = A\left(\alpha B\right)$$

$$AI = A$$

$$IB = B$$

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0}B = \mathbf{0}$$

Observação

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ \cdots \\ \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow AX = B$$

com $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Definição

$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ é uma **solução** de $AX = B$ se $AS = B$

Observação $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

Observação MUITO IMPORTANTE:

$$\text{Se} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

então:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n$$

Definição

Sistema linear homogéneo: $AX = \mathbf{0}$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Definição

À solução geral do sistema linear homogéneo $AX = \mathbf{0}$ chama-se **núcleo** de A e escreve-se $\mathcal{N}(A)$

$$\mathcal{N}(A) = \{X : AX = \mathbf{0}\}$$

Observação

$AX = \mathbf{0}$ admite pelo menos a **solução trivial**:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorema

Se $AX = B$ tem duas soluções distintas X_0 e X_1 então terá infinitas soluções.

Teorema

Todo o sistema linear homogéneo tem solução: ou tem só a solução trivial ou tem infinitas soluções.

Se $A \quad m \times n$ é tal que $m < n$ então $AX = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.

Teorema

$$Y, W \text{ soluções de } AX = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$Y + W \text{ solucão de } AX = \mathbf{0}$$

$$Y \text{ solução de } AX = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha Y \text{ solução de } AX = \mathbf{0}$$

Teorema

$$\begin{array}{c}\text{solução geral de}\\ AX = B\end{array} = \begin{array}{c}\text{solução particular de}\\ AX = B\end{array} + \begin{array}{c}\text{solução geral de}\\ AX = \mathbf{0}\end{array}$$

Exemplo

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

A solução geral de $AX = B$:

(Sol. part de $AX = B$) $+$ (Sol. geral de $AX = \mathbf{0}$)

$(0, 0, -1, 0)$ é uma solução particular de $AX = B$.

Exemplo solução geral de $AX = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdots]{} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = w \\ y = -2w \\ z = -\frac{1}{2}w \end{cases}$$

solução geral de $AX = \mathbf{0}$:

$$\left\{(w, -2w, -\tfrac{1}{2}w, w) : w \in \mathbb{R}\right\}$$

solução geral de $AX = B$:

$$\{(0, 0, -1, 0)\} + \left\{(w, -2w, -\tfrac{1}{2}w, w) : w \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{(w, -2w, -\tfrac{1}{2}w - 1, w) : w \in \mathbb{R}\right\}$$

Resolução Alternativa.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x + 2y \ + 2w = 0 \\ -3y + 6z - 3w = -6 \\ 2z + w = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = w \\ y = -2w \\ z = -1 - \frac{1}{2}w \end{cases}$$

solução geral de $AX = B$:

$$\left\{ \left(w, -2w, -1 - \tfrac{1}{2}w, w \right) : w \in \mathbb{R} \right\}$$

Definição

A é **invertível** se existir uma matriz B tal que

$$AB = BA = I$$

B é a **matriz inversa** de A e $B = A^{-1}$

Observação

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$I^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema

A inversa de uma matriz invertível é única

Se uma matriz quadrada tiver uma linha ou uma coluna nula então não é invertível

Se A é invertível e $AB = AC$ então $B = C$

Se A é invertível e $AB = \mathbf{0}$ então $B = \mathbf{0}$

Se existir $l \in \mathbb{N}$ tal que $A^l = \mathbf{0}$ então A não é invertível

Teorema

Se $\alpha \neq 0$ e A é invertível então αA é invertível e

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

Se A é invertível então A^T é invertível e

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Se A e B são invertíveis então AB é invertível

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Se A é invertível então A^m é invertível e

$$(A^m)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m$$

Notação

$A^{-m} = (A^m)^{-1}$

Como inverter matrizes invertíveis do tipo $n \times n$

Se A fôr invertível: $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$\mathbf{A}X = \mathbf{I}B \Leftrightarrow \mathbf{I}X = \mathbf{A}^{-1}B \qquad [A \mid I] \underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[I \mid A^{-1}\right]$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = I$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 8 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Logo, A não é invertível.

Teorema A $n \times n$. As seguintes condições são equivalentes.

$AX = B$ tem a solução única $X = A^{-1}B$

$AX = \mathbf{0}$ tem a solução única $X = \mathbf{0}$

A é invertível

car $A = n$

nul $A = 0$

Teorema A, B $n \times n$

$$AB \text{ invertível } \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ são invertíveis.}$$

Teorema A $n \times n$

$$AB = I \quad \Rightarrow \quad (BA = I \qquad \text{e} \qquad B = A^{-1})$$

Definição

A **transposta** de

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

é

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A_1 A_2 ... A_n)^T = A_n^T ... A_2^T A_1^T$$

Definição $A = (a_{ij})_{n \times n}$

A é **simétrica** se $A = A^T$ $(a_{ij} = a_{ji})$

Exemplo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Definição $A = (a_{ij})_{n \times n}$

A é **anti-simétrica** se $A = -A^T$ $(a_{ij} = -a_{ji})$

Exemplo $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Observação $A + A^T$ é simétrica, $A - A^T$ é anti-simétrica

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

Teorema.

Se A é simétrica invertível então A^{-1} é simétrica

Se A e B são simétricas, AB é simétrica $\Leftrightarrow AB = BA$

Definição. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$. O **traço** de A é o número real (ou complexo)

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + ... + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemplo $\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\right) = -2$

Teorema. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$ e α escalar. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A+B) &= \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \\ \mathrm{tr}(\alpha A) &= \alpha\,\mathrm{tr}(A) \\ \mathrm{tr}(A^T) &= \mathrm{tr}(A) \\ \mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}(BA) \end{aligned}$$