Definição.

Permutação de $1, 2, ..., n$ é qualquer lista em que os mesmos sejam apresentados por ordem arbitrária

Definição.

Numa permutação $(i_1 i_2 ... i_n)$ de $1, 2, ..., n$, $\left(i_j i_k\right)$ é uma **inversão** quando i_j e i_k aparecerem por ordem decrescente

Definição.

Uma permutação $(i_1 i_2 ... i_n)$ diz-se **par** (**ímpar**) quando o n^o máximo de inversões fôr par (ímpar)

Exemplo.

(21453) é ímpar pois tem as inversões (21), (43) e (53)

Definição.

A $n \times n$. Chama-se **determinante** de A, e escreve-se $|A|$ ou **det** A, o número que se obtém do seguinte modo:

(i) Formam-se todos os produtos possíveis de n factores sem repetições em que não intervenha mais do que um elemento da mesma linha e da mesma coluna de A.

(ii) Afecta-se cada produto do sinal $+$ ou do sinal $-$ conforme as permutações (dos números naturais $1, 2, ..., n$) que figuram nos índices de linha e de coluna tenham a mesma paridade ou não.

(iii) Somam-se as parcelas obtidas.

Observação.

Em resumo: fixando, por exemplo, a permutação $(i_1 ... i_n)$ de $1, ..., n$

$$|A| \underset{\text{Def}}{=} \sum_{\substack{(j_1 j_2 ... j_n) \\ \text{permutação de } 1,2,...,n}} (-1)^{\sigma} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} ... a_{i_n j_n},$$

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } (i_1 i_2 ... i_n) \text{ e } (j_1 j_2 ... j_n) \text{ têm a mesma paridade} \\ \\ 1 & \text{se } (i_1 i_2 ... i_n) \text{ e } (j_1 j_2 ... j_n) \text{ têm paridade diferente} \end{cases}$$

Se A é $n \times n$ então $|A|$ tem $n!$ parcelas ou fixando a permutação $(1, 2, ..., n)$

$$|A| = \sum_{\substack{(i_1 i_2 ... i_n) \\ \text{permutação de } 1,2,...,n}} (-1)^\sigma a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n}$$

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } (i_1 i_2 ... i_n) \text{ é par} \\ 1 & \text{se } (i_1 i_2 ... i_n) \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

ou

$$|A| = \sum_{\substack{(j_1 j_2 ... j_n) \\ \text{permutação de } 1,2,...,n}} (-1)^\sigma a_{1 j_1} a_{2 j_2} ... a_{n j_n}$$

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } (j_1 j_2 ... j_n) \text{ é par} \\ 1 & \text{se } (j_1 j_2 ... j_n) \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Teorema. $A \;\; n \times n$.

$$\det\left(A^T\right) = \det A$$

Exemplo. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +(-3)(-1)(-2)\times$
$3 \times 2 = -36$ porque (41532) é par (contém 6 inversões)

Exemplo. **(i)** $A = [a]$ $\quad 1 \times 1$

$$\det A = a$$

(ii) A $\quad 2 \times 2$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Observação.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemplo. (iii) $A \quad 3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observação.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Exemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - (-1)2 = 0$$

Exemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)(-3) + 3 + 8 - 1(-1)2 - 6(-3) - 2 = 32$$

Definição.

$A \quad n\times n$, $n>1$. Chama-se **menor-**ij de A à matriz A_{ij} do tipo $(n-1)\times(n-1)$ que se obtem de A suprimindo a linha i e a coluna j de A

Teorema. Fórmula de Laplace

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} \qquad i\in\{1,\ldots,n\} \text{ fixo}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij} \qquad j\in\{1,\ldots,n\} \text{ fixo}$$

Exemplo. $i=2$ fixo

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-4)\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\left((-2)\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = -4$$

Exemplo. $j = 3$ fixo

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-2)\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+\,(-4)\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+\,(-2)\,(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

ou (usando Gauss como veremos a seguir):

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \ldots = - \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -4$$

Teorema. A e B do tipo $n \times n$, λ escalar

(i) Se A fôr diagonal, triangular superior ou triangular inferior então $\det A$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de A

(ii) Se A tiver uma linha (coluna) nula então $\det A = 0$.

(iii) Se B fôr obtida de A trocando duas linhas (ou colunas) de A então $\det B = -\det A$.

(iv) Se duas linhas (ou colunas) de A forem iguais então $\det A = 0$.

(v) Se B fôr obtida de A multiplicando uma linha (ou coluna) de A por um escalar λ então $\det B = \lambda \det A$.

(vi) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

(vii) Se B fôr obtida de A somando a uma linha (ou coluna) de A um múltiplo escalar λ de uma outra linha (ou coluna) de A então $\det B = \det A$

(viii) $\det A \neq 0$ se e só se A é invertível

(ix) $\det(AB) = \det A \det B$

(x) $\det(A_1 A_2 \ldots A_l) = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_l$

(xi) Se A fôr invertível $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$

(xii) $\det(AB) = 0 \Leftrightarrow \det A = 0 \;\text{ ou }\; \det B = 0$

(xiii) $\det(AB) = \det(BA)$

(xiv) Se fixarmos $n-1$ linhas (colunas), o determinante de A é uma função linear em relação à linha (coluna) não fixada.

Exemplo.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1+3 & 2+5 & -4+7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{=-17} = \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{=-17}$$

Observação. Em geral $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Definição. Seja A do tipo $n \times n$ com $n > 1$. À matriz do tipo $n \times n$:

$$\operatorname{cof} A = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{n \times n}$$

chama-se a **matriz dos cofactores** de A.

Teorema. Seja A do tipo $n \times n$ com $n > 1$. Então

$$A\,(\operatorname{cof} A)^T = (\operatorname{cof} A)^T\, A = (\det A)\, I.$$

Se $\det A \neq 0$ então A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(\operatorname{cof} A)^T = \left(\underbrace{\frac{1}{\det A}(-1)^{j+i} \det A_{ji}}_{\text{entrada } (i,j) \text{ de } A^{-1}} \right)_{n \times n}$$

Observação. Seja A do tipo 2×2 com $\det A \neq 0$. Então

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observação. A fórmula serve para calcular não só a inversa de uma matriz invertível mas também **entradas concretas** dessa inversa.

Exemplo. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. A entrada $(2,3)$ de A^{-1} é dada por $(A^{-1})_{23} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{3+2}\det A_{32}\right) =$

$$= \frac{1}{-3}\left(-\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right)\right) = 2$$

Calculando todas as entradas de A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Teorema. Regra de Cramer

Seja A invertível. Então a única solução de $AX = B$ é:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\text{cof}\, A)^T\, B.$$

Isto é

$$x_i = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\left((\text{cof}\, A)^T\right)_{ik} b_k =$$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}\det A_{ki}b_k = \frac{\det C_i}{\det A}$$

onde C_i é a matriz obtida de A substituindo a coluna i de A pela matriz coluna B dos termos independentes.

$$x_i = \frac{\det C_i}{\det A}$$

Exemplo.

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + 2y + 4z = 7 \\ -x + z = 1 \end{cases} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 13$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = -18 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 14$$