

Valores próprios e vectores próprios

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique se 0 é valor próprio de A e caso seja determine um vector próprio associado.
2. Determine uma matriz A real simétrica ($A^T = A$) 2×2 cujos valores próprios sejam -2 e 2 e tal que $(2, 1)$ seja um vector próprio associado ao valor próprio 2 .
3. Sabendo que os vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ e $(1, -1, 0)$ são vectores próprios da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, determine a, b, c, d, e, f .
4. Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que A_1, A_2 e A_3 são diagonalizáveis. Isto é, determine matrizes de mudança de bases P_1^{-1}, P_2^{-1} e P_3^{-1} e matrizes diagonais D_1, D_2 e D_3 tais que

$$D_1 = P_1 A_1 P_1^{-1}, \quad D_2 = P_2 A_2 P_2^{-1} \quad \text{e} \quad D_3 = P_3 A_3 P_3^{-1}.$$

Ou seja, verifique que existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de A_1 , uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A_2 e outra base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A_3 .

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a, b, c de modo a que exista uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída só por vectores próprios de A .
6. Para cada parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, sejam

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (i) Prove que u_1 e u_2 são vectores próprios de A . Determine os valores próprios associados.
- (ii) Determine os valores próprios de A e indique os valores de α para os quais A tem 3 valores próprios todos distintos.
- (iii) Determine, em função de α , bases para os espaços próprios associados.
- (iv) Identifique, justificando, os valores de α para os quais a matriz A é diagonalizável.

7. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Para cada α real, considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Prove que $(4, 1 + \alpha, -4)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.
- b) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.
- c) Determine uma base para cada espaço próprio de A e identifique os valores de α para os quais A é diagonalizável.

8. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Determine os valores próprios de A e diga, justificando, se A é invertível.
- b) Determine, caso exista, uma base para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A .

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

- (i) Determine os valores próprios de A e diga, justificando, se A é invertível e se A é diagonalizável.
- (ii) Determine bases para os subespaços próprios de A .
- (iii) Diagonalize A , isto é, determine D e P^{-1} tais que $D = PAP^{-1}$.

10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (0, y + 3z, 3y + z).$$

- (i) Diga quais dos seguintes vectores:

$$v_1 = (2, 1, 1), \quad v_2 = (0, -1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 0), \quad v_4 = (-1, 1, 3), \quad v_5 = (0, 3, 3)$$

são vectores próprios.

- (ii) Determine os valores próprios de T .
- (iii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.
- (iv) Determine os subespaços próprios de T .

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (i) Verifique que os vectores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ são vectores próprios de T .
- (ii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.
- (iii) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T .
- (iv) Diagonalize T . Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que $D = PAP^{-1}$.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base ordenada

$$\{(0, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

- (i) Determine o polinómio característico de T .
- (ii) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T .
- (iii) Diagonalize a transformação linear T , isto é, determine uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a matriz que represente T seja uma matriz diagonal.
- (iv) Determine A^n e $T^n(x, y, z)$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2z, y, 2x + z).$$

- a) Determine os valores próprios de T e diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.
- b) Diga se T pode ou não ser representada por uma matriz diagonal em relação a uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, determine uma tal base ordenada e indique a correspondente matriz diagonal que representa T .

14. Considere matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere a base ordenada $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$A = M(T; B; B).$$

- a) Determine os valores próprios da matriz A .
- b) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A .
- c) Verifique se o vector $(1, 0, -1)$ é vector próprio da matriz A ou da transformação linear T .
- d) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x, y, z) = (2, 1, 1)$.