IST - Álgebra Linear - 2^o semestre 2018/2019

Valores próprios e vectores próprios

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique se 0 é valor próprio de A e caso seja determine um vector próprio associado.

2. Determine uma matriz A real simétrica ($A^T = A$) 2×2 cujos valores próprios sejam -2 e 2 e tal que $(2, 1)$ seja um vector próprio associado ao valor próprio 2.

3. Sabendo que os vectores $(1, 1, 1), (1, 0, -1)$ e $(1, -1, 0)$ são vectores próprios da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, determine a, b, c, d, e, f.

4. Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Verifique que A_1, A_2 e A_3 são diagonalizáveis. Isto é, determine matrizes de mudança de bases P_1^{-1}, P_2^{-1} e P_3^{-1} e matrizes diagonais D_1, D_2 e D_3 tais que

$$D_1 = P_1 A_1 P_1^{-1}, \quad D_2 = P_2 A_2 P_2^{-1} \quad \text{e} \quad D_3 = P_3 A_3 P_3^{-1}.$$

   Ou seja, verifique que existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de A_1, uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A_2 e outra base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A_3.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a, b, c de modo a que exista uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída só por vectores próprios de A.

6. Para cada parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, sejam

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \; u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   (i) Prove que u_1 e u_2 são vectores próprios de A. Determine os valores próprios associados.

   (ii) Determine os valores próprios de A e indique os valores de α para os quais A tem 3 valores próprios todos distintos.

   (iii) Determine, em função de α, bases para os espaços próprios associados.

   (iv) Identifique, justificando, os valores de α para os quais a matriz A é diagonalizável.

7. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Para cada α real, considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Prove que $(4, 1+\alpha, -4)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.

b) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

c) Determine uma base para cada espaço próprio de A e identifique os valores de α para os quais A é diagonalizável.

8. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine os valores próprios de A e diga, justificando, se A é invertível.

b) Determine, caso exista, uma base para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(i) Determine os valores próprios de A e diga, justificando, se A é invertível e se A é diagonalizável.

(ii) Determine bases para os subespaços próprios de A.

(iii) Diagonalize A, isto é, determine D e P^{-1} tais que $D = PAP^{-1}$.

10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (0, y + 3z, 3y + z).$$

(i) Diga quais dos seguintes vectores:

$$v_1 = (2,1,1), \quad v_2 = (0,-1,1), \quad v_3 = (1,0,0), \quad v_4 = (-1,1,3), \quad v_5 = (0,3,3)$$

são vectores próprios.

(ii) Determine os valores próprios de T.

(iii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

(iv) Determine os subespaços próprios de T.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que os vectores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ são vectores próprios de T.

(ii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

(iii) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(iv) Diagonalize T. Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que $D = PAP^{-1}$.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base ordenada

$$\{(0,1,0),(1,0,-1),(1,0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine o polinómio característico de T.

(ii) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(iii) Diagonalize a transformação linear T, isto é, determine uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a matriz que represente T seja uma matriz diagonal.

(iv) Determine A^n e $T^n(x,y,z)$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z) = (x+2z, y, 2x+z).$$

a) Determine os valores próprios de T e diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

b) Diga se T pode ou não ser representada por uma matriz diagonal em relação a uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, determine uma tal base ordenada e indique a correspondente matriz diagonal que representa T.

14. Considere matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere a base ordenada $B = \{(1,0,0),(1,1,0)),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$A = M(T;B;B).$$

a) Determine os valores próprios da matriz A.

b) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

c) Verifique se o vector $(1,0,-1)$ é vector próprio da matriz A ou da transformação linear T.

d) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x,y,z) = (2,1,1)$.