

Valores próprios e vectores próprios (resolução)

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} \det(A - 0I) &= \det \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{*} = 0 \end{aligned}$$

então 0 é valor próprio de A e atendendo a (*) $(1, -2, 1) \in \mathcal{N}(A) = L\{(1, -2, 1)\}$, logo tem-se

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

isto é, $(1, -2, 1)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0.

2. Determinemos uma matriz A real simétrica ($A^T = A$) 2×2 cujos valores próprios sejam -2 e 2 e tal que $(2, 1)$ seja um vector próprio associado ao valor próprio 2 .

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A = A^T$. Logo $b = c$. Além disso, sendo -2 e 2 dois valores próprios de A tem-se

$$0 = \det(A + 2I) = \det \begin{bmatrix} a+2 & b \\ b & d+2 \end{bmatrix} = -b^2 + 2a + 2d + ad + 4$$

e

$$0 = \det(A - 2I) = \det \begin{bmatrix} a-2 & b \\ b & d-2 \end{bmatrix} = -b^2 - 2a - 2d + ad + 4$$

sendo $(2, 1)$ um vector próprio associado ao valor próprio 2 tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (2a + b = 4 \text{ e } 2b + d = 2).$$

Logo

$$\begin{cases} -b^2 + 2a + 2d + ad + 4 = 0 \\ -b^2 - 2a - 2d + ad + 4 = 0 \\ 2a + b = 4 \\ 2b + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{5} \\ b = \frac{8}{5} \\ d = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

e assim

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

3. Sabendo que os vectores $(1, 1, 1), (1, 0, -1)$ e $(1, -1, 0)$ são vectores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

existem λ_1, λ_2 e $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1, 1, 1) \in \mathcal{N}(A - \lambda_1 I), \quad (1, 0, -1) \in \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) \quad \text{e} \quad (1, -1, 0) \in \mathcal{N}(A - \lambda_3 I),$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 & 1 \\ a & b - \lambda_1 & c \\ d & e & f - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_2 & 1 & 1 \\ a & b - \lambda_2 & c \\ d & e & f - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_3 & 1 & 1 \\ a & b - \lambda_3 & c \\ d & e & f - \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se respectivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - \lambda_1 = 0 \\ a + b + c - \lambda_1 = 0 \\ d + e + f - \lambda_1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ a + b + c = 3 \\ d + e + f = 3, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_2 = 0 \\ a - c = 0 \\ d - f + \lambda_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = 0 \\ a = c \\ d = f \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_3 = 0 \\ a - b + \lambda_3 = 0 \\ d - e = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 = 0 \\ a = b \\ d = e. \end{array} \right.$$

Assim,

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ a = b = c = d = e = f = 1. \end{cases}$$

4. (i) Seja

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(5 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (3 - \lambda)(4 - \lambda).$$

Os valores próprios de A_1 são

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda_1 & 1 \\ -2 & 5 - \lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0\} = \\ &= \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_1} .

Os vectores próprios de A_1 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$$u = (s, s), \quad \text{com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(A_1 - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda_2 & 1 \\ -2 & 5 - \lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2x + y = 0\} = \\ &= \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 2)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 2)\}$ é uma base de E_{λ_2} .

Os vectores próprios de A_1 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 4$ são

$$u = (s, 2s), \quad \text{com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

É possível ter uma base de \mathbb{R}^2 constituída só por vectores próprios de A_1 :

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1, 1), (1, 2)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2.$$

Logo, a matriz A_1 é diagonalizável e tem-se

$$D_1 = P_1 A_1 P_1^{-1},$$

com

$$P_1^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seja

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 1] = \\ &= (2 - \lambda)[(3 - \lambda) - 1][(3 - \lambda) + 1] = (2 - \lambda)^2(4 - \lambda). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A_2 são

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(A_2 - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda_1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\} = \\ &= \{(x, -z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_1} .

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 2$ são

$$u = (s, -t, t), \quad \text{com } s \neq 0 \text{ ou } t \neq 0.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(A_2 - \lambda_2 I) = \\
 &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda_2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\
 &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2x + y + z = 0 \text{ e } -y + z = 0\} = \\
 &= \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1, 1)\}).
 \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_2} .

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 4$ são

$$u = (s, s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

É possível ter uma base de \mathbb{R}^3 constituída só por vectores próprios de A_2 :

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (1, 1, 1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Logo, a matriz A_2 é diagonalizável e tem-se

$$D_2 = P_2 A_2 P_2^{-1},$$

com

$$P_2^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(iii) Seja

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
 \det(A_3 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) [(1 - \lambda)^2 - 1] = \\
 &= (-\lambda) [(1 - \lambda) - 1][(1 - \lambda) + 1] = \lambda^2 (2 - \lambda).
 \end{aligned}$$

Os valores próprios de A_3 são

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(A_3 - \lambda_1 I) = \\
 &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
 &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\} = \\
 &= \{(-y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}).
 \end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de E_{λ_1} .

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (-s, s, t), \text{ com } s \neq 0 \text{ ou } t \neq 0.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(A_2 - \lambda_2 I) = \\
 &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \\
 &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0 \text{ e } -2z = 0\} = \\
 &= \{(y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1, 0)\}).
 \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 1, 0)\}$ é uma base de E_{λ_2} .

Os vectores próprios de A_3 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (s, s, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

É possível ter uma base de \mathbb{R}^3 constituída só por vectores próprios de A_3 :

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Logo, a matriz A_3 é diagonalizável e tem-se

$$D_3 = P_3 A_3 P_3^{-1},$$

com

$$P_3^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Determinemos os valores próprios de A . Tem-se

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^4 = \lambda^4.$$

O valor próprio de A é $\lambda = 0$.

O subespaço próprio E_λ é dado por

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : ax = 0 \text{ e } by = 0 \text{ e } cz = 0\}. \end{aligned}$$

Assim, para que exista uma base de \mathbb{R}^4 constituída só por vectores próprios de A é necessário que se tenha

$$a = b = c = 0.$$

Caso contrário, teríamos

$$\dim E_\lambda < 4.$$

6. (i) Como

$$Au_1 = (\alpha + 1)u_1$$

e

$$Au_2 = (\alpha - 1)u_2$$

então u_1, u_2 são vectores próprios de A , associados respectivamente aos valores próprios $\alpha + 1$ e $\alpha - 1$.

(ii)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)[(\alpha - \lambda)^2 - 1] = (3 - \lambda)(\lambda - \alpha - 1)(\lambda - \alpha + 1).$$

Para $(\alpha + 1 \neq 3 \text{ e } \alpha - 1 \neq 3) \Leftrightarrow \alpha \notin \{2, 4\}$ os valores próprios de A : $3, \alpha + 1$ e $\alpha - 1$ são todos distintos.

(iii) Para $\alpha \notin \{2, 4\}$, $\{u_1\}, \{u_2\}$ e $\{(3 - \alpha, \alpha^2 - 6\alpha + 8, 1)\}$ são bases de $E_{\alpha+1}$, $E_{\alpha-1}$ e E_3 , respectivamente.

Para $\alpha = 2$, $E_3 = E_{\alpha+1}$. Além disso, $\{u_2\}$ é uma base de $E_{\alpha-1}$ e $\{u_1\}$ é uma base de E_3 .
 Para $\alpha = 4$, $E_3 = E_{\alpha-1}$. Além disso, $\{u_2\}$ é uma base de E_3 e $\{u_1\}$ é uma base de $E_{\alpha+1}$.

(iv) Para $\alpha \notin \{2, 4\}$ a matriz A é diagonalizável, pois os seus valores próprios são todos distintos. Se $\alpha = 2$ ou $\alpha = 4$ então 3 é valor próprio de A e $m_g(3) = 1 < 2 = m_a(3)$, pelo que A não é diagonalizável. Logo A é diagonalizável $\Leftrightarrow \alpha \notin \{2, 4\}$.

7. a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1+\alpha \\ -4 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 1+\alpha \\ -4 \end{bmatrix},$$

logo $(4, 1 + \alpha, -4)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio -1 .

b)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & \alpha \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda),$$

logo, os valores próprios de A são: 3 e -1 onde $m_a(3) = 2$ e $m_a(-1) = 1$ são as respectivas multiplicidades algébricas.

c) Espaços próprios de A : $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ e $\mathcal{N}(A - 3I)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(A - (-1)I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & \alpha \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = L(\{(4, 1 + \alpha, -4)\}).$$

O conjunto $\{(4, 1 + \alpha, -4)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ pois gera $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ e é linearmente independente.

$$\mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} L(\{(0, 1, 0)\}) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ L(\{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}) & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

O conjunto $\{(0, 1, 0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - 3I)$ se $\alpha \neq 1$. O conjunto $\{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - 3I)$ se $\alpha = 1$.

A é diagonalizável se e só se existir uma base de \mathbb{R}^3 formada só por vectores próprios de A ($\{(4, 2, -4), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$) se e só se $\alpha = 1$.

8. a)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)\lambda(2-\lambda).$$

Logo, os valores próprios de A são 1, 0 e 2. Como 0 é valor próprio de A então A não é invertível.

b) Como A tem 3 valores próprios distintos, qualquer conjunto de 3 vectores próprios associados respectivamente a cada um desses valores próprios, será linearmente independente, pelo que existirá uma base ordenada de \mathbb{R}^3 formada só por vectores próprios de A . Uma tal base poderá ser $\{(0, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ uma vez que os subespaços próprios associados aos valores próprios 1, 0 e 2 são respectivamente dados por:

$$\mathcal{N}(A - I) = L(\{(0, 1, 0)\}), \mathcal{N}(A) = L(\{(-1, 0, 1)\}), \mathcal{N}(A - 2I) = L(\{(1, 2, 1)\}).$$

9.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Tem-se

$$\det(A - 0I) = \det A = -5 \neq 0.$$

Logo, como 0 não é valor próprio de A então A é invertível.

Os valores próprios de A são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 9 = [(2 - \lambda) - 3][(2 - \lambda) + 3] = \\ &= (-1 - \lambda)(5 - \lambda) \end{aligned}$$

Logo, os valores próprios de A são

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 5.$$

Como A tem 2 valores próprios distintos, os vectores próprios correspondentes a cada um deles irão ser linearmente independentes e como tal irá existir uma base de \mathbb{R}^2 formada só com vectores próprios de A , ou seja, A é diagonalizável.

(ii) O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right) = L(\{(-1, 1)\}).$$

O conjunto $\{(-1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_1} .

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_1 = -1$ são

$$u = (-s, s), \quad \text{com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1, 1)\}).$$

O conjunto $\{(1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_2} .

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda_2 = 5$ são

$$u = (s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de \mathbb{R}^2 constituída só por vectores próprios de A :

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(-1, 1), (1, 1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

Logo, a matriz A é diagonalizável e tem-se

$$D = PAP^{-1}$$

com

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

10. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (0, y + 3z, 3y + z).$$

(i) $T(v_1) = (0, 4, 4)$. Como não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_1) = \lambda v_1$, então v_1 não é vector próprio de T .

$T(v_2) = (0, 2, -2) = (-2)(0, -1, 1) = (-2)v_2$. Logo, v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio -2 .

$T(v_3) = (0, 0, 0) = 0(1, 0, 0) = 0v_3$. Logo, v_3 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0 .

$T(v_4) = (0, 10, 6)$. Como não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_4) = \lambda v_4$, então v_4 não é vector próprio de T .

$T(v_5) = (0, 12, 12) = 4(0, 3, 3) = 4v_5$. Logo, v_5 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 4 .

(ii) Determinemos os valores próprios de T . Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 3)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 3, 1)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A .

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda [(1 - \lambda)^2 - 9] = \\ &= -\lambda ((1 - \lambda) - 3)((1 - \lambda) + 3) = -\lambda (-2 - \lambda)(4 - \lambda). \end{aligned}$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A , isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 4.$$

(iii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como T tem 3 valores próprios distintos, os vectores próprios correspondentes a cada um deles irão ser linearmente independentes e como tal irá existir uma base de \mathbb{R}^3 formada só com vectores próprios de T , ou seja, T é diagonalizável.

(iv) O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : y = z = 0\} = \\ &= \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 0, 0)\}$ é uma base de E_{λ_1} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s, 0, 0), \quad \text{com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A + 2I) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y + z = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y + z = 0\} = \\ &= \{(0, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, -1, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0, -1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_2} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = -2$ são

$$u = (0, -s, s), \quad \text{com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_3} &= \mathcal{N}(T - \lambda_3 I) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}(A - \lambda_3 I) = \mathcal{N}(A - 4I) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } -y + z = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y = z\} = \\ &= \{(0, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 1, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0, 1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_3} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3 = 4$ são

$$u = (0, s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de \mathbb{R}^3 é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Sejam $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$. Atendendo à matriz, tem-se

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1, 0, 0) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = \\ &= (0, 0, 0) = 0(1, 0, 0) = 0v_1; \\ T(v_2) &= T(1, 1, 1) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = \\ &= (1, 1, 1) = 1(1, 1, 1) = 1v_2; \\ T(v_3) &= T(0, 0, 1) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = \\ &= (0, 0, 0) = 0(0, 0, 1) = 0v_3. \end{aligned}$$

Logo, v_1 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0; v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 1; v_3 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0.

(ii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como os vectores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base de \mathbb{R}^3 pois são três vectores linearmente independentes em \mathbb{R}^3 e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e além disso, v_1 , v_2 e v_3 são vectores próprios de T , então existe uma base de \mathbb{R}^3 formada só com vectores próprios de T , ou seja, T é diagonalizável.

(iii) Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A .

Determinemos os valores próprios de T . Os valores próprios de T são os valores próprios de A , isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1 - \lambda).$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\} = \\ &= \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de E_{λ_1} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s, 0, t), \quad \text{com } s \neq 0 \text{ ou } t \neq 0.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : -x + y = 0 \text{ e } y - z = 0\} = \\ &= \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_2} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são

$$u = (s, s, s), \quad \text{com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(iv) É possível ter então uma base de \mathbb{R}^3 constituída só por vectores próprios de T :

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Note ainda que

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = S_{\mathcal{B}_c^3 \rightarrow \mathcal{B}_{vp}} A (S_{\mathcal{B}_c^3 \rightarrow \mathcal{B}_{vp}})^{-1}$$

com

$$(S_{\mathcal{B}_c^3 \rightarrow \mathcal{B}_{vp}})^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3).$$

Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal tendo-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ S_{\mathcal{B}_c^3 \rightarrow \mathcal{B}_{vp}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \rightarrow \mathcal{B}_{vp}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

Em resumo, existe $P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c^3}$ tal que

$$D = PAP^{-1}$$

$$\text{com } D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 1)\}$$

(ordenada) de \mathbb{R}^3 é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa T em relação à base canónica \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^3 é dada por:

$$\begin{aligned} B &= M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c) = S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} (S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c})^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que deste modo, para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tem-se

$$T(x, y, z) = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (9x, 3x + 7y - z, 3x - 2y + 8z).$$

(i) O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 0 & 0 \\ 3 & 7 - \lambda & -1 \\ 3 & -2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (9 - \lambda)[(7 - \lambda)(8 - \lambda) - 2] = \\ &= (9 - \lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 54) = (9 - \lambda)(\lambda - 9)(\lambda - 6) = \\ &= -(\lambda - 9)^2(\lambda - 6). \end{aligned}$$

(ii) Os valores próprios de T são os valores próprios de B , isto é, são os valores de λ para os quais $\det(B - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 9 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 6.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(B - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y - z = 0\} = \\ &= \{(x, y, 3x - 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 3), (0, 1, -2)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 0, 3), (0, 1, -2)\}$ é uma base de E_{λ_1} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 9$ são

$$u = (s, t, 3s - 2t), \quad \text{com } s \neq 0 \text{ ou } t \neq 0.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(B - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : 3x = 0 \text{ e } y - z = 0\} = \\ &= \{(0, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 1, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0, 1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_2} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 6$ são

$$u = (0, s, s), \quad \text{com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de \mathbb{R}^3 constituída só por vectores próprios de T :

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1, 0, 3), (0, 1, -2), (0, 1, 1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Logo, a matriz que representa T na base \mathcal{B}_{vp} é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1, 0, 3) = (9, 0, 27) = 9(1, 0, 3) + 0(0, 1, -2) + 0(0, 1, 1),$$

$$T(0, 1, -2) = (0, 9, -18) = 0(1, 0, 3) + 9(0, 1, -2) + 0(0, 1, 1)$$

e

$$T(0, 1, 1) = (0, 6, 6) = 0(1, 0, 3) + 0(0, 1, -2) + 6(0, 1, 1).$$

Deste modo, $(\lambda_1, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0)$ e $(0, 0, \lambda_3)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$.

Logo, atendendo ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \xrightarrow[T]{B} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ (S_{\mathcal{B}_c^3 \rightarrow \mathcal{B}_{vp}})^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \rightarrow \mathcal{B}_{vp}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

tem-se

$$D = PBP^{-1},$$

com

$$D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com

$$P^{-1} = (S_{\mathcal{B}_c^3 \rightarrow \mathcal{B}_{vp}})^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3).$$

Isto é, a matriz B é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

(iv) Atendendo a que

$$D = PBP^{-1},$$

tem-se

$$B = P^{-1}DP.$$

Logo,

$$\begin{aligned} B^n &= P^{-1}D^nP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 6^n \\ 9^n & 9^n(-2) & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 9^n - 6^n & \frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & -\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \\ 9^n - 6^n & -\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^n &= (S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c})^{-1} B^n S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 9^n - 6^n & \frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & -\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \\ 9^n - 6^n & -\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}6^n + \frac{1}{3}9^n & \frac{4}{3}9^n - \frac{4}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n - \frac{2}{3}6^n \\ \frac{1}{3}9^n - \frac{1}{3}6^n & \frac{2}{3}6^n + \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{3}6^n - \frac{1}{3}9^n \\ \frac{1}{3}6^n - \frac{1}{3}9^n & \frac{2}{3}9^n - \frac{2}{3}6^n & \frac{1}{3}9^n - \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$T^n(x, y, z) = B^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^n x \\ (9^n - 6^n)x + \left(\frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n\right)y + \left(-\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n\right)z \\ (9^n - 6^n)x + \left(-\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n\right)y + \left(\frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n\right)z \end{bmatrix},$$

para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

13. a) e b) Seja $\mathcal{B}_c^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canónica de \mathbb{R}^3 . Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 0, 2)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (2, 0, 1)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A .

Determinemos os valores próprios de T . Os valores próprios de T são os valores próprios de A , isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) [(1 - \lambda)^2 - 4] = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(3 - \lambda). \end{aligned}$$

Logo, os valores próprios de T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(0, 1, 0)\}).$$

O conjunto $\{(0, 1, 0)\}$ é uma base de E_{λ_1} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ são $u = (0, s, 0)$, com $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A + I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = L(\{(-1, 0, 1)\}).$$

O conjunto $\{(-1, 0, 1)\}$ é uma base de E_{λ_2} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = -1$ são $u = (-s, 0, s)$, com $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$E_{\lambda_3} = \mathcal{N}(T - \lambda_3 I) = \mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 1)\}).$$

O conjunto $\{(1, 0, 1)\}$ é uma base de E_{λ_3} .

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3 = 3$ são $u = \{(s, 0, s)\}$, com $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como 0 não é valor próprio de T então T é invertível. Como T tem 3 valores próprios distintos, os vectores próprios associados serão linearmente independentes, pelo que existirá uma base ordenada de \mathbb{R}^3 formada só por vectores próprios, por exemplo:

$$\{(0, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, 1)\}.$$

Isto é, T é representada em relação à base anterior pela matriz diagonal:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

14. a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (2 - \lambda) [(1 - \lambda)^2 - 1^2] = -\lambda(\lambda - 2)^2, \end{aligned}$$

onde $\{0, 2\}$ é o conjunto dos valores próprios de A com $m_a(0) = 1$ e $m_a(2) = 2$.

b) $\{(1, 0, -1)\}$ é uma base para o espaço próprio $E_0 = \mathcal{N}(A)$ e $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é uma base para o espaço próprio

$$E_2 = \mathcal{N}(A - 2I) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto $\{(1, 0, -1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 formada só por vectores próprios de A .

c) $(1, 0, -1)$ é vector próprio da matriz A pela alínea b), mas não é vector próprio da transformação linear T , pois

$$T(1, 0, -1) = (0, 2, 0) \neq \lambda(1, 0, -1);$$

note que

$$\begin{aligned} T(1, 0, -1) &= T[1(1, 0, 0) + 1(1, 1, 0) - 1(1, 1, 1)] = \\ &= T(1, 0, 0) + T(1, 1, 0) - T(1, 1, 1) = (1, 0, 1) + (0, 2, 0) - (1, 0, 1) = (0, 2, 0). \end{aligned}$$

d) $(1, 0, 0)$ é uma solução particular de

$$T(x, y, z) = (2, 1, 1),$$

i.e. $T(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$. Por outro lado $\{(-1, 0, 1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ e portanto $\{(0, 1, 1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$, pois

$$(0, 1, 1) = -1(1, 0, 0) + 0(1, 1, 0) + 1(1, 1, 1).$$

Logo a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (2, 1, 1)$ é:

$$\{(1, 0, 0) + c(0, 1, 1) : c \in \mathbb{R}\} = \{(1, c, c) : c \in \mathbb{R}\}.$$