Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o semestre 2017/2018

Matriz de mudança de coordenadas e transformações lineares (resolução)

1. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1,5)$.

(i) Tem-se $v = (1,2) + 3(0,1)$. Logo, 1 e 3 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_1$.

(ii) Tem-se $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, uma vez que

$$(1,2) = -(1,1) + (2,3) e (0,1) = -2(1,1) + (2,3).$$

(iii) As coordenadas de $v = (1,5)$ em relação à base $\mathcal{B}_2$, são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

uma vez que 1 e 3 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_1$.

(iv) Tem-se $v = (1,5) = -7(1,1) + 4(2,3)$.

(v) Tem-se $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, uma vez que $(1,1) = (1,2) - (0,1)$ e $(2,3) = 2(1,2) - (0,1)$.

Observação:

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \left(S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1}.$$

(vi) As coordenadas de $v = (1,5)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$, são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

uma vez que -7 e 4 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_2$.

2. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde

$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (0,1).$$

Seja $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determinemos $\mathcal{B}_2$.

Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então $w_1 = 2v_1 + v_2 = 2(1,2) + (0,1) = (2,5)$ e $w_2 = v_1 + v_2 = (1,2) + (0,1) = (1,3)$. Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \{(2,5),(1,3)\}.$$

3. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

Seja $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinemos $\mathcal{B}_1$.

Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

então $v_1 = 2(-1+t) - (1+t) = -3 + t$ e $v_2 = 3(-1+t) + 2(1+t) = -1 + 5t$. Logo,

$$\mathcal{B}_1 \;=\; \{-3+t, -1+5t\}.$$

4. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,0), \quad v_3 = (0,0,1).$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinemos $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$. Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

então $v_1 = w_1 + 2w_2 - w_3$, $v_2 = w_1 + w_2 - w_3$ e $v_3 = 2w_1 + w_2 + w_3$. Isto é, tem-se o sistema

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 - w_3 = (1,0,1) \\ w_1 + w_2 - w_3 = (1,1,0) \\ 2w_1 + w_2 + w_3 = (0,0,1), \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Pelo método de eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & | & (1,0,1) \\ 1 & 1 & -1 & | & (1,1,0) \\ 2 & 1 & 1 & | & (0,0,1) \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & | & (1,0,1) \\ 0 & -1 & 0 & | & (0,1,-1) \\ 0 & -3 & 3 & | & (-2,0,-1) \end{array}\right] \underset{-3L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-3L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & | & (1,0,1) \\ 0 & -1 & 0 & | & (0,1,-1) \\ 0 & 0 & 3 & | & (-2,-3,2) \end{array}\right].$$

Tem-se então o sistema

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 - w_3 = (1,0,1) \\ \\ -w_2 = (0,1,-1) \\ \\ 3w_3 = (-2,-3,2). \end{cases}$$

Logo, $w_3 = \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right)$, $w_2 = (0,-1,1)$ e $w_1 = (1,0,1) - 2(0,-1,1) + \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right)$.
Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right), (0,-1,1), \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

Note que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

em que

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1)\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right), (0,-1,1), \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

5. Sejam

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determinemos a matriz $S_{B_1\to B_2}$.

Queremos encontrar $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Logo, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Isto é, tem-se os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 1 = -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 1 = 2a_2 + 2a_3 \\ 0 = -2a_3 + 2a_4 \\ 1 = 4a_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ 0 = 2b_2 + 2b_3 \\ 0 = -2b_3 + 2b_4 \\ 1 = 4b_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ 0 = 2c_2 + 2c_3 \\ 1 = -2c_3 + 2c_4 \\ 1 = 4c_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ 1 = 2d_2 + 2d_3 \\ -1 = -2d_3 + 2d_4 \\ -1 = 4d_4 \end{cases}$$

que são equivalentes a

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{4} \\ a_3 = \frac{1}{4} \\ a_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \\ b_2 = -\frac{1}{4} \\ b_3 = \frac{1}{4} \\ b_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{4} \\ c_3 = -\frac{1}{4} \\ c_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = \frac{1}{4} \\ d_2 = \frac{1}{4} \\ d_3 = \frac{1}{4} \\ d_4 = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Logo

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Assim, as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2 são dadas por

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1, -1)$ e $(2, 2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1 + t$ e $1 - t$ em relação à base B. Determine B.

Tem-se

$$\begin{cases} 1+t = v_1 - v_2 \\ 1-t = 2v_1 + 2v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{4}t \\ -\frac{1}{4}-\frac{3}{4}t \end{bmatrix}.$$

Logo $B = \left\{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}-\frac{3}{4}t\right\}$.

7. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1,-1)$ e $(2,2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1,1)$ e $(2,-2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$.

Seja

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{cases} 2 = a-b \\ 2 = c-d \\ 2 = a+b \\ -2 = c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e assim} \quad S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. a) Como $1-t^2 = t-t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2+2t)$, as coordenadas de $1-t^2$ na base $\mathcal{B}$ são 1 e $-\frac{1}{2}$.

b) $\mathcal{B}_1 = \left\{1\left(t-t^2\right) + 0\left(-2+2t\right), 1\left(t-t^2\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2+2t\right)\right\} = \left\{t-t^2, 1-t^2\right\}$.

c)

$$V \underset{3-t \in V}{=} L\left(\left\{-1+t^2, -2+t-t^2\right\}\right).$$

Como

$$-1+t^2 \in U \qquad \text{e} \qquad -2+t-t^2 \notin U,$$

tem-se

$$U+V = \mathcal{P}_2$$

e assim $\{-1+t^2\}$ é uma base para $U \cap V$.

9. As coordenadas do vector $1-t$ em $\mathcal{B}_1$ são 1 e 0 uma vez que

$$1-t = 1\,(1-t) + 0\left(1-t^2\right).$$

Como

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

logo, as coordenadas do vector $1-t$ em $\mathcal{B}_2$ são -1 e 1.

10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. A aplicação $T_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_{a,b}(x) = ax + b$ é linear se e só se $b = 0$ e $a \in \mathbb{R}$.

11. **(i)** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0) = (1, 3)$ e $T(0, 1) = (2, -1)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2y, 3x - y) = (0, 0)\right\} = \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y \ \text{ e } \ 3x = y\right\} = \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Logo T é injectiva e $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x + 2y, 3x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 3) + y(2, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1, 3), (2, -1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(1, 3), (2, -1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1, 3), (2, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva. Sendo T sobrejectiva e tendo-se dim (espaço de partida) = dim (espaço de chegada) então T também é injectiva, como se constatou no facto de se ter $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Observação: T é injectiva se e só se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, onde $\mathbf{0}$ é o vector nulo do espaço de partida.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y) = M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0)\}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,3),(2,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,3),(2,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(ii) Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (1-y,2x)$. T não é linear pois $T(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$.

(iii) Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x,2x,-x)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,2,-1)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,2x,-x) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{y(0,1,0) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então

$$\{(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x,2x,-x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,2,-1) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,2,-1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(1,2,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,2,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right)\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,2,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(1,2,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(iv) Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z) = (0,0)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = T(0,1,0) = T(0,0,1) = (0,0)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^3.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c^3$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 3$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 0$. De facto

$$\mathcal{I}(T) = \{(0,0)\}.$$

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^2$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ nos espaços de partida e de chegada respectivamente, tem-se

$$T(x,y,z)=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T)=\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^3=L\left(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T)=\mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\right)=\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=\{(0,0)\}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c^3$.

(v) Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ com $T(x,y)=-3x$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c)=\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0)=-3$ e $T(0,1)=0$. Note que $\mathcal{B}_c=\{1\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : T(x,y)=0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -3x=0\right\}= \\ &= \left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{y(0,1)\in\mathbb{R}^2 : y\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(0,1)\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então $\{(0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=1$. Uma vez que

$$\dim\underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{espaço de partida}}=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T),$$

então $\dim\mathcal{I}(T)=1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T)=\{-3x : x\in\mathbb{R}\}=L\left(\{1\}\right).$$

Como o conjunto $\{1\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, a base canónica de $\mathbb{R}$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}$ e $\dim\mathcal{I}(T)=\dim\mathbb{R}$ então $\mathcal{I}(T)=\mathbb{R}$, isto é, T é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c)=\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y) = M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0,1)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{-3\}\right) = L\left(\{1\}\right).$$

O conjunto $\{(0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (0,-1,2)$. T não é linear pois $T(0,0,0) = (0,-1,2) \neq (0,0,0)$.

(vii) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x,0,-x)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (2,0,-1)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = (0,0,0)\} = \{x \in \mathbb{R} : (2x,0,-x) = (0,0,0)\} = \{0\}.$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(2x,0,-x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(2,0,-1) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(2,0,-1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(2,0,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(2,0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ então T é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\,[x].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3)\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{0\}\right) = \{0\}
\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(2,0,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(2,0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(viii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z) = (x^2 - y, 2y)$. T não é linear, pois por exemplo:

$$T\left((1,0,0) + (1,0,0)\right) = T(2,0,0) = (4,0) \neq (2,0) = T(1,0,0) + T(1,0,0).$$

(ix) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z,w) = (x - y, 3w)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0,0) = (1,0)$, $T(0,1,0,0) = (-1,0)$, $T(0,0,1,0) = (0,0)$ e $T(0,0,0,1) = (0,3)$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T(x,y,z,w) = (0,0)\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x-y,3w) = (0,0)\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y \ \text{ e } \ w = 0\right\} = \\
&= \left\{(y,y,z,0) \in \mathbb{R}^4 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \left\{y(1,1,0,0) + z(0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= L\left(\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right).
\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^4}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \{(x-y,3w) : x,y,w \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{x(1,0) + y(-1,0) + w(0,3) : x,y,w \in \mathbb{R}\} = \\
&= L\left(\{(1,0),(-1,0),(0,3)\}\right).
\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0),(0,3)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0),(0,3)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^4$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z,w) = M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{C}\left(\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right]\right) = L\left(\{(1,0),(0,3)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(1,0),(0,3)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(x) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com $T(x,y,z) = (-z, y-2z, 2y, y+z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (0,0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,2,1)$ e $T(0,0,1) = (-1,-2,0,1)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (-z, y-2z, 2y, y+z) = (0,0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,0,0)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então $\{(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(-z, y-2z, 2y, y+z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^4$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,0,0)\}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4)\right) = \mathcal{C}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right]\right) = L\left(\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xi) Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0,0)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (0,0)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = (0,0)\} = \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c = \{1\}$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 0$. De facto

$$\mathcal{I}(T) = \{(0,0)\}.$$

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^2$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c$ e $\mathcal{B}_c^2$ nos espaços de partida e de chegada respectivamente, tem-se

$$T(x) = M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R} = L(\{1\})$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0)\}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c = \{1\}$.

(xii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x+2y, 3z, x-z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,0,1)$, $T(0,1,0) = (2,0,0)$ e $T(0,0,1) = (0,3,-1)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2y, 3z, x-z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \{(x+2y, 3z, x-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1,0,1) + y(2,0,0) + z(0,3,-1) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= L(\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xiii) Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x,y,z)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ e $T(0,0,1) = (0,0,1)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \{(0,0,0)\}.$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3,$$

isto é, T é sobrejectiva. Como o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

(xiv) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com

$$T(p(t)) = 2p(1-t) - tp'(t).$$

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(p_1(t) + p_2(t)) &= T((p_1 + p_2)(t)) = 2(p_1 + p_2)(1-t) - t(p_1 + p_2)'(t) = \\ &= 2p_1(1-t) + 2p_2(1-t) - tp_1'(t) - tp_2'(t) = \\ &= 2p_1(1-t) - tp_1'(t) + 2p_2(1-t) - tp_2'(t) = \\ &= T(p_1(t)) + T(p_2(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = 2(\lambda p)(1-t) - t(\lambda p)'(t) = \\ &= \lambda 2p(1-t) - t\lambda p'(t) = \lambda(2p(1-t) - tp'(t)) = \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = 2 \times 1 - t \times 0 = 2$, $T(t) = 2(1-t) - t \times 1 = 2 - 3t$ e

$$T(t^2) = 2(1-t)^2 - t2t = 2 - 4t + 2t^2 - 2t^2 = 2 - 4t.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}(M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1, -4, 3)\}),$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L(\{(1, -4, 3)\})\right\} = L\left(\left\{1 - 4t + 3t^2\right\}\right).$$

Como $\{1 - 4t + 3t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0+a_1t+a_2t^2\right)=\mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2\left(a_0+a_1(1-t)+a_2(1-t)^2\right)-t(a_1+2a_2t)=\mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2a_0+2a_1-2a_1t+2a_2-4a_2t+2a_2t^2-a_1t-2a_2t^2=\mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2a_0+2a_1+2a_2+(-3a_1-4a_2)t=\mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1=-\frac{4}{3}a_2 \text{ e } a_0=\frac{1}{3}a_2\right\} = \\
&= \left\{\frac{1}{3}a_2-\frac{4}{3}a_2t+a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t+t^2\right\}\right) = L\left(\left\{1-4t+3t^2\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como $\{1-4t+3t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim\mathcal{N}(T)=1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:
Como $\{1,t,t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1),T(t),T\left(t^2\right)\right\}\right) = L(\{2,2-3t,2-4t\}) = L(\{2,2-3t\}).$$

Uma vez que o conjunto $\{2,2-3t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{2,2-3t\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim\mathcal{I}(T)=2$.
Como $\dim\mathcal{P}_2=3$, tem-se $\mathcal{I}(T)\neq\mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:
Sendo $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, com $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}
T(p(t)) &= 2\left(a_0+a_1(1-t)+a_2(1-t)^2\right)-t(a_1+2a_2t) = \\
&= 2a_0+2a_1-2a_1t+2a_2-4a_2t+2a_2t^2-a_1t-2a_2t^2 = \\
&= a_0 2+a_1(2-3t)+a_2(2-4t).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{I}(T)=L(\{2,2-3t,2-4t\})=L(\{2,2-3t\})$. Uma vez que o conjunto $\{2,2-3t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{2,2-3t\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xv) Seja $T:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_2$ com

$$T(p(t)) = p(0)-p(-1)+(p(-1)+p(1))t+(p(-1)-p(1)-2p(0))t^2.$$

T é linear uma vez que, para todos os $p(t),p_1(t),p_2(t)\in\mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$T(p_1(t)+p_2(t)) = T((p_1+p_2)(t)) =$$

$$\begin{aligned}
= \;& (p_1+p_2)(0)-(p_1+p_2)(-1)+((p_1+p_2)(-1)+(p_1+p_2)(1))t + \\
& +((p_1+p_2)(-1)-(p_1+p_2)(1)-2(p_1+p_2)(0))t^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& p_1(0)-p_1(-1)+(p_1(-1)+p_1(1))t+(p_1(-1)-p_1(1)-2p_1(0))t^2 + \\
& +p_2(0)-p_2(-1)+(p_2(-1)+p_2(1))t+(p_2(-1)-p_2(1)-2p_2(0))t^2
\end{aligned}$$

$$= T(p_1(t)) + T(p_2(t)),$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = \lambda \left(p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2 \right) = \\ &= \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = 1 - 1 + (1+1)\, t + (1 - 1 - 2)\, t^2 = 2t - 2t^2$,

$$T(t) = 0 - (-1) + ((-1) + 1)\, t + ((-1) - 1 - 2 \times 0)\, t^2 = 1 - 2t^2$$

e

$$T(t^2) = 0 - 1 + (1+1)\, t + (1 - 1 - 2 \times 0)\, t^2 = -1 + 2t.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$:
Como

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})) &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= L(\{(-1, 1, 1)\}), \end{aligned}$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L(\{(-1, 1, 1)\}) \right\} = L\left(\left\{ -1 + t + t^2 \right\} \right).$$

Como $\{-1 + t + t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \right) = \mathbf{0} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + \\ + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2 = \mathbf{0} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : p(0) - p(-1) = 0 \text{ e } p(-1) + p(1) = 0 \text{ e } \\ p(-1) - p(1) - 2p(0) = 0 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 - (a_0 - a_1 + a_2) = 0 \text{ e } \\ (a_0 - a_1 + a_2) + (a_0 + a_1 + a_2) = 0 \text{ e } \\ (a_0 - a_1 + a_2) - (a_0 + a_1 + a_2) - 2a_0 = 0 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = a_2 \text{ e } a_0 = -a_2 \right\} = \\ &= \left\{ -a_2 + a_2 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a_2 \left(-1 + t + t^2 \right) \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= L\left(\left\{ -1 + t + t^2 \right\} \right). \end{aligned}$$

Como $\{-1 + t + t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:
Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}\right) = L\left(\left\{1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}\right).$$

Uma vez que o conjunto $\{1 - 2t^2, -1 + 2t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.
Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:
Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2 =$$

$$= a_0 - \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2\right) + \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_0 + a_1 + a_2\right) t +$$
$$+ \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 - (a_0 + a_1 + a_2) - 2a_0\right) t^2 =$$

$$\begin{aligned} &= a_1 - a_2 + (2a_0 + 2a_2)\, t + (-2a_0 - 2a_1)\, t^2 = \\ &= a_0\left(2t - 2t^2\right) + a_1\left(1 - 2t^2\right) + a_2(-1 + 2t). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{I}(T) = L(\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2, -1 + 2t\}) = L(\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\})$. Como o conjunto

$$\left\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\right\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xvi) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.
T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = T((p_1 + p_2)(t)) = \begin{bmatrix} (p_1 + p_2)(1) & (p_1 + p_2)(0) \\ (p_1 + p_2)(0) & (p_1 + p_2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} p_1(1) + p_2(1) & p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) & p_1(-1) + p_2(-1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} p_1(1) & p_1(0) \\ p_1(0) & p_1(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(1) & p_2(0) \\ p_2(0) & p_2(-1) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$
$$= T(p_1(t)) + T(p_2(t)),$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda p)(1) & (\lambda p)(0) \\ (\lambda p)(0) & (\lambda p)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda p(1) & \lambda p(0) \\ \lambda p(0) & \lambda p(-1) \end{bmatrix} = \\ &= \lambda \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$ e

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad T(t^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathcal{N}(T)$:
Como

$$\mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0,0)\},$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) = (0,0,0)\right\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Logo, T é injectiva uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) = 0$.

Resolução alternativa para calcular $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T(p(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 & a_0 \\ a_0 & a_0 - a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 = a_2 = 0 \right\} = \{0\}.
\end{aligned}$$

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:
Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right).$$

Uma vez que o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 3$.

Como $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:
Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 & a_0 \\ a_0 & a_0 - a_1 + a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_0 \\ a_0 & a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= a_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$. Como o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xvii) Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(X) = \operatorname{tr}(X) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva ainda a equação linear $T(X) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Logo

$$M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de $\mathcal{N}(T)$:
Como

$$\mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= L\left(\{(-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}\right),$$

então

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

$\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$. Logo, T não é injectiva uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) = 3 \neq 0$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:
Como $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$ gera $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= L\left(\left\{T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\}\right) = \\ &= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right). \end{aligned}$$

Uma vez que o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 1$.

Como $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pelo que T não é sobrejectiva.

Solução geral de $T(X) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} + L\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

12. (i) $M(T_\theta; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, uma vez que $T(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $T(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Além disso, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (T_\theta \circ T_\eta)(x,y) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\eta & -\operatorname{sen}\eta \\ \operatorname{sen}\eta & \cos\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\eta & -\operatorname{sen}\eta \\ \operatorname{sen}\eta & \cos\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\eta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\eta & -\cos\theta\operatorname{sen}\eta - \cos\eta\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta\operatorname{sen}\eta + \cos\eta\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\cos\eta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\eta) & -\operatorname{sen}(\theta+\eta) \\ \operatorname{sen}(\theta+\eta) & \cos(\theta+\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= T_{\theta+\eta}(x,y). \end{aligned}$$

Logo $T_\theta \circ T_\eta = T_{\theta+\eta}$. E assim $(T_\theta)^{-1} = T_{-\theta}$.

(ii) $M(T_\theta;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\0&\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$.

(iii) $M(T_\theta;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}\cos 2\theta&\operatorname{sen}2\theta\\\operatorname{sen}2\theta&-\cos 2\theta\end{bmatrix}$.

(iv) $M(T_\theta;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}\cos^2\theta&\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\\operatorname{sen}\theta\cos\theta&\operatorname{sen}^2\theta\end{bmatrix}$.

(v) $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$.

(vi) $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}$.

(vii) e **(viii)** $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}$.

(ix) e **(x)** $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}$.

13. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&-1&0\end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$T(x,y,z)=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=(x+2y+z,x+y,2x-y).$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T)&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:T(x,y,z)=(0,0,0)\right\}=\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x+2y+z,x+y,2x-y)=(0,0,0)\right\}=\\&=\{(0,0,0)\}.\end{aligned}$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x + 2y + z, x + y, 2x - y) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,2), (2,1,-1), (1,0,0)\}).$$

Como o conjunto $\{(1,1,2), (2,1,-1), (1,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,1,2), (2,1,-1), (1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x, y, z) = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,1,2), (2,1,-1), (1,0,0)\}).$$

O conjunto $\{(1,1,2), (2,1,-1), (1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

14 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2y, y - x, -x).$$

Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (1, 2, 0), \quad v_3 = (-1, 1, 1).$$

Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$\begin{aligned} T(1, 0, -1) &= (0, -1, -1) = 2(1, 0, -1) - (1, 2, 0) + (-1, 1, 1), \\ T(1, 2, 0) &= (4, 1, -1) = -4(1, 0, -1) + 3(1, 2, 0) - 5(-1, 1, 1) \;\text{ e} \\ T(-1, 1, 1) &= (2, 2, 1) = -5(1, 0, -1) + 3(1, 2, 0) - 4(-1, 1, 1). \end{aligned}$$

15. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear

$$S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\text{ definida por }\; S(A) = A^T.$$

Tem-se

$$M(S; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1 = (1, 1), \quad u_2 = (2, -1), \quad v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 2), \quad v_3 = (0, 1, -1),$$

é representada pela matriz

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{B}_1' = \{u_1', u_2'\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1' = (1,0), \quad u_2' = (1,1), \quad v_1' = (1,0,0), \quad v_2' = (1,1,0), \quad v_3' = (1,1,1).$$

(i) Tem-se

$$(-1,2) = (1,1) - (2,-1).$$

Logo, as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1$ são 1 e -1. Deste modo, as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são dadas por

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(ii) Tem-se

$$(-1,2) = -3(1,0) + 2(1,1).$$

Logo, as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1'$ são -3 e 2.

Resolução alternativa: Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1'} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $u_1 = 0u_1' + u_2'$ e $u_2 = 3u_1' - u_2'$. Tendo em conta (por **(i)**) que as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1$ são 1 e -1, então as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1'$ são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1'}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Uma vez que (por **(i)**) as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são -1, -2 e 3, então

$$T(-1,2) = -(1,0,1) - 2(1,1,2) + 3(0,1,-1) = (-3,1,-8).$$

Por outro lado, tem-se

$$(-3,1,-8) = -4(1,0,0) + 9(1,1,0) - 8(1,1,1).$$

Logo, as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2'$ são -4, 9 e -8.

Resolução alternativa: Determinemos a matriz $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'}$. Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $v_1 = v_1' - v_2' + v_3'$, $v_2 = 0v_1' - v_2' + 2v_3'$ e $v_3 = -v_1' + 2v_2' - v_3'$. Tendo em conta que (por **(i)**) as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são -1, -2 e 3, então as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2'$ são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

(iv) Determinemos uma base para $\mathcal{N}(T)$. Seja $u \in \mathbb{R}^2$ e sejam (α_1, α_2) as coordenadas de u em relação à base

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(2,-1)\}.$$

Tem-se

$$u \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))$$

e como

$$\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0)\},$$

$$\mathcal{N}(T) = \{0(1,1) + 0(2,-1)\} = \{(0,0)\}.$$

Assim, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva.

(v) Determinemos uma base para $\mathcal{I}(T)$. Como $\{(1,1),(2,-1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L(\{T(1,1), T(2,-1)\}) =$$

$$= L(\{1(1,0,1) + (-1)(1,1,2) + 3(0,1,-1), 2(1,0,1) + 1(1,1,2) + 0(0,1,-1)\}) =$$

$$= L(\{(0,2,-4),(3,1,4)\}).$$

Uma vez que o conjunto $\{(0,2,-4),(3,1,4)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\{(0,2,-4),(3,1,4)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$, pelo que T não é sobrejectiva.

(vi) Determinemos a expressão geral de T, isto é, $T(x,y)$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considerando as bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$ respectivamente:

$$\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}, \qquad \mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_c^3} M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_c^2}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Logo, para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$T(x, y) = M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \\ -4y \end{bmatrix} = (x - y, x + y, -4y).$$

Resolução alternativa à alínea (v) para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:
Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \left\{T(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x - y, x + y, -4y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \left\{(x, x, 0) + (-y, y, -4y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \left\{x(1, 1, 0) + y(-1, 1, -4) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= L(\{(1, 1, 0), (-1, 1, -4)\}) \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1, 1, 0), (-1, 1, -4)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\{(1, 1, 0), (-1, 1, -4)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Note que:

$$L(\{(1, 1, 0), (-1, 1, -4)\}) = L(\{(0, 2, -4), (3, 1, 4)\}).$$

(vii) Tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \\ S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1'} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1') & \underset{M(T;\mathcal{B}_1';\mathcal{B}_2')}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2') \end{array}$$

Logo,

$$M(T; \mathcal{B}_1'; \mathcal{B}_2') = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1'}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) S_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

17. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y - z).$$

(i) Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0)=(1,1)$, $T(0,1,0)=(1,1)$ e $T(0,0,1)=(0,-1)$.

(ii) Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z)=(0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+y,x+y-z)=(0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,-x,0)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,-1,0)\}\right).\end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{(1,-1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e $\dim\mathcal{N}(T)=1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0)\}$.

(iii) Tem-se

$$\mathcal{I}(T)=\{(x+y,x+y-z):x,y,z\in\mathbb{R}\}=\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,1),(0,-1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(1,1),(0,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,1),(0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim\mathcal{I}(T)=2$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim\mathcal{I}(T)=\dim\mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T)=\mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva.

(iv) O vector $(1,0,0)$ é uma solução particular da equação linear

$$T(x,y,z)=(1,1).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x,y,z)=(1,1)$ é dada por:

$$\{(1,0,0)\}+\mathcal{N}(T)=\left\{(1+t,-t,0)\in\mathbb{R}^3 : t\in\mathbb{R}\right\}.$$

(v) Não existe nenhum vector $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ para o qual a equação linear $T(x,y,z)=(a,b)$ seja impossível, uma vez que T é sobrejectiva.

(vi) Não existe nenhum vector $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ para o qual a equação linear $T(x,y,z)=(a,b)$ seja possível e determinada, uma vez que T não é injectiva.

18. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ que a representa em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$T(x, y, z) = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x + 2y + 2z, 2x + y + 4z, 2z).$$

(ii) Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Logo, T é injectiva e $\dim \mathcal{N}(T) = 0$.

(iii) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \{(x + 2y + 2z, 2x + y + 4z, 2z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1, 2, 0) + y(2, 1, 0) + z(2, 4, 2) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L\left(\{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 4, 2)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 4, 2)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 4, 2)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

(iv) Como $T(1, 1, 0) = T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) = (2, 1, 0) + (1, 2, 0) = (3, 3, 0)$, então o vector $(1, 1, 0)$ é uma solução particular da equação linear

$$T(x, y, z) = (3, 3, 0).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (3, 3, 0)$ é dada por:

$$\{(1, 1, 0)\} + \mathcal{N}(T) = \{(1, 1, 0)\}.$$

(v) Não existe nenhum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$ seja impossível, uma vez que T é sobrejectiva.

(vi) Não existe nenhum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$ seja possível e indeterminada, uma vez que T é injectiva.

19. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que a representa em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0),$$

é dada por

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&4\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

(i) Seja $A=M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$. Seja $u\in\mathbb{R}^3$ e sejam $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ as coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$. Tem-se

$$u\in\mathcal{N}(T)\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathcal{N}(A)$$

e como

$$\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&4\\0&0&2\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right)=\{(-2y,y,0):y\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(-2,1,0)\}\right),$$

$$\mathcal{N}(T)=L\left(\{(-2)\,(1,1,1)+1(1,1,0)+0(1,0,0)\}\right)=L\left(\{(1,1,2)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,1,2)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente. Assim, $\dim\mathcal{N}(T)=1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0,0)\}$.

Como

$$\dim\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}}=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T),$$

então $\dim\mathcal{I}(T)=2$ e assim $\mathcal{I}(T)\neq\mathbb{R}^3$ (pois $\dim\mathbb{R}^3=3$), isto é, T não é sobrejectiva.

Expressão geral de T:

$$T(x,y,z)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&4\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=$$

$$=(8x-2y-3z,6x-3z,2x-z).$$

Cálculo alternativo de $\mathcal{N}(T)$: Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T)&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:T(x,y,z)=(0,0,0)\right\}=\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(8x-2y-3z,6x-3z,2x-z)=(0,0,0)\right\}=\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:z=2x\quad\text{e}\quad x=y\right\}\\&=\left\{(x,x,2x)\in\mathbb{R}^3:x\in\mathbb{R}\right\}=\\&=L\left(\{(1,1,2)\}\right).\end{aligned}$$

(ii) Quanto ao contradomínio:

$$\mathcal{I}(T)=L\left(\{T(1,1,1),T(1,1,0),T(1,0,0)\}\right)=$$

$$=L(\{1(1,1,1)+2(1,1,0)+0(1,0,0),2(1,1,1)+$$

$$+4(1,1,0)+0(1,0,0),2(1,1,1)+4(1,1,0)+2(1,0,0)\})=$$

$$=L\left(\{(3,3,1),(6,6,2),(8,6,2)\}\right)=L\left(\{(6,6,2),(8,6,2)\}\right)=L\left(\{(8,6,2),(-2,0,0)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(8,6,2),(-2,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então

$$\{(8,6,2),(-2,0,0)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Cálculo alternativo de $\mathcal{I}(T)$: Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \{(8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= L(\{(8,6,2),(-2,0,0),(-3,-3,-1)\}) = \\ &= L(\{(8,6,2),(-2,0,0)\}) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right). \end{aligned}$$

(iii) É fácil ver que $(2,4,0) \notin \mathcal{I}(T)$. Logo, a equação linear $T(x,y,z) = (2,4,0)$ não tem soluções.

(iv) Tem-se $T(1,1,1) = 1(1,1,1) + 2(1,1,0) + 0(1,0,0) = (3,3,1)$ e assim

$$T\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-1, -1, -\frac{1}{3}\right)$$

Logo, a solução geral de

$$T(x,y,z) = \left(-1, -1, -\frac{1}{3}\right)$$

é dada por:

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = \left(-1,-1,-\frac{1}{3}\right)\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\} + \mathcal{N}(T) =$$

$$= \left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)) + s(1,1,2) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

(v) Por exemplo o vector $(1,0,0)$ ou qualquer vector $(a,b,c) \in \mathcal{I}(T)$, uma vez que sendo T não injectiva, sempre que a equação linear fôr possível, ela será indeterminada.

(vi) Tem-se

$$T(v_1) = (1,1,1) + 2(1,1,0) + 0(1,0,0) = (3,3,1),$$

$$T(v_2) = 2(1,1,1) + 4(1,1,0) + 0(1,0,0) = (6,6,2)$$

e

$$T(v_3) = 2(1,1,1) + 4(1,1,0) + 2(1,0,0) = (8,6,2).$$

Logo,

$$T(1,0,0) = T(v_3) = (8,6,2),$$

$$T(0,1,0) = T(v_2) - T(v_3) = (-2,0,0)$$

e

$$T(0,0,1) = T(v_1) - T(v_2) = (-3,-3,-1).$$

Assim,

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e deste modo, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= (8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z).$$

20. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x + y + z, x + 2y - 4z, z).$$

(i) Tendo em conta que $T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,2,0)$ e $T(0,0,1) = (1,-4,1)$, tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(ii) A matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ é invertível pois

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, T é injectiva e como tal invertível, tendo-se

$$\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1} = M(T^{-1};\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3).$$

Determinemos $(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3))^{-1}$.

$$\left[M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) \mid I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -6\\ -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

e como tal, para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -6\\ -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=$$

$$=(2x-y-6z,-x+y+5z,z).$$

Observação: $T^{-1}\circ T=T\circ T^{-1}=I$. Isto é, para qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\left(T^{-1}\circ T\right)(x,y,z)=\left(T\circ T^{-1}\right)(x,y,z)=(x,y,z),$$

como se pode ver:

$$\begin{aligned}\left(T^{-1}\circ T\right)(x,y,z) &= T^{-1}\left(T(x,y,z)\right)=T^{-1}(x+y+z,x+2y-4z,z)=\\ &= (2x+2y+2z-x-2y+4z-6z,-x-y-z+x+2y-4z+5z,z)=\\ &= (x,y,z);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(T\circ T^{-1}\right)(x,y,z) &= T\left(T^{-1}(x,y,z)\right)=T(2x-y-6z,-x+y+5z,z)=\\ &= (2x-y-6z-x+y+5z+z,2x-y-6z-2x+2y+10z-4z,z)=\\ &= (x,y,z).\end{aligned}$$

Demonstração alternativa da injectividade de T: Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:T(x,y,z)=(0,0,0)\right\}=\\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x+y+z,x+2y-4z,z)=(0,0,0)\right\}=\\ &= \{(0,0,0)\}.\end{aligned}$$

Logo, T é injectiva.

(iii) Sendo T injectiva, como os espaços de partida e de chegada têm a mesma dimensão, então T é sobrejectiva. Logo, T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo.

(iv) Tem-se

$$T(x,y,z)=(1,1,2)\Leftrightarrow(x,y,z)=T^{-1}(1,1,2)=(-11,10,2).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x,y,z)=(1,1,2)$ é: $\{(-11,10,2)\}$.

21. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } T(X) = AX - XA, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Sejam $X, X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} T(X_1 + X_2) &= A(X_1 + X_2) - (X_1 + X_2)A = AX_1 + AX_2 - X_1A - X_2A = \\ &= AX_1 - X_1A + AX_2 - X_2A = T(X_1) + T(X_2) \end{aligned}$$

e

$$T(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda\,(AX - XA) = \lambda T(X).$$

(ii) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c & d-a \\ d-a & -b-c \end{bmatrix}.$$

Logo, a expressão geral de T é dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b+c & d-a \\ d-a & -b-c \end{bmatrix}.$$

(iii) Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iv) Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \left\{X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Como $\mathcal{N}(T) \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ então T não é injectiva.

(v) Atendendo a que $\dim \mathcal{N}(T) = 2$ e $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. T não é sobrejectiva uma vez que $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determinemos uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \left\{ T(X) : X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} b+c & d-a \\ -a+d & -b-c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right) = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Como o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

22. Seja $A = M\left(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right)$. Como $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, pois $\det A = 1 \neq 0$, T é injectiva. Logo, se a equação linear $T(x, y) = (1, 2)$ tiver solução, ela é única. Como $\mathcal{C}(A) = \mathcal{I}(T)$ e uma vez que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(A)$ pois: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, então $(1, 0)$ é a solução única da equação linear $T(x, y) = (1, 2)$.

Resolução alternativa da equação linear $T(x, y) = (1, 2)$:
Como A é invertível, T é invertível e

$$T(x, y) = (1, 2) \Leftrightarrow (x, y) = T^{-1}(1, 2) = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

23. Tem-se $M\left(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^1\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, pois $T_1(1, 0) = 1$ e $T_1(0, 1) = 0$. Logo

$$M\left(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = M\left(T_2; \mathcal{B}_c^1; \mathcal{B}_c^2\right) M\left(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^1\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1) = \mathcal{N}(M\left(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = L\left(\{(0, 1)\}\right)$. Pelo que $\{(0, 1)\}$ é base de $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$, uma vez que $\{(0, 1)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

24. Como $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, tem-se $T(1,0,1)=1(1,1)-(0,1)=(1,0)$,
$T(0,1,1)=0(1,1)+0(0,1)=(0,0)$ e $T(1,0,1)=1(1,1)-(0,1)=(1,0)$. Por outro lado, como $\mathcal{B}_1=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ gera o "espaço de partida" $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}(T)=L\left(\{T(1,0,1),T(0,1,1),T(0,0,1)\}\right)=L\left(\{(1,0)\}\right).$$

Pelo que $\{(1,0)\}$ é base de $\mathcal{I}(T)$, pois $(1,0)$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$.

Tem-se $\dim\mathcal{I}(T)=\operatorname{car}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))=\operatorname{car}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=1$. Como $\mathcal{I}(T)\neq\mathbb{R}^2$, pois $\dim\mathcal{I}(T)=1\neq 2=\dim\mathbb{R}^2$, então T não é sobrejectiva.

25. Considere a transformação linear $T_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x,y,z)=(2x+y,y+2z)$. Considere ainda a transformação linear $T_2:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}=\{(2,1),(1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada pela matriz $M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(i)

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T_1) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T_1(x,y,z)=(0,0)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (2x+y,y+2z)=(0,0)\right\}= \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=z=-\frac{y}{2}\right\}=\left\{\left(-\frac{y}{2},y,-\frac{y}{2}\right): y\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(1,-2,1)\}\right).\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,-2,1)\}$ gera $\mathcal{N}(T_1)$ e é linearmente independente, logo é uma base de $\mathcal{N}(T_1)$. Tem-se

$$\dim\mathcal{N}(T_1)=1 \quad \text{e} \quad \dim\mathcal{N}(T_1)+\dim\mathcal{I}(T_1)=\dim\mathbb{R}^3,$$

e assim $\dim\mathcal{I}(T_1)=2$. Logo, como $\mathcal{I}(T_1)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim\mathcal{I}(T_1)=\dim\mathbb{R}^2=2$, então $\mathcal{I}(T_1)=\mathbb{R}^2$ e assim, T_1 é sobrejectiva.

(ii) Como $\mathcal{B}=\{(2,1),(1,2)\}$ gera o "espaço de partida" $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T_2)=L\left(\{T_2(2,1),T_2(1,2)\}\right)=L\left(\{(2,1,1),(1,1,2)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(2,1,1),(1,1,2)\}$ gera $\mathcal{I}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T_2)$.

Tem-se

$$\dim\mathcal{I}(T_2)=2 \quad \text{e} \quad \dim\mathcal{N}(T_2)+\dim\mathcal{I}(T_2)=\dim\mathbb{R}^2,$$

e assim $\dim\mathcal{N}(T_2)=0$. Logo, T_2 é injectiva.

(iii) Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{5}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

logo o conjunto $\{(1,-2,1),(2,1,1),(1,1,2)\}$ gera $\mathcal{N}(T_1)+\mathcal{I}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{N}(T_1)+\mathcal{I}(T_2)$.

Logo, como $\mathcal{N}(T_1)+\mathcal{I}(T_2)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim(\mathcal{N}(T_1)+\mathcal{I}(T_2)) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, então $\mathcal{N}(T_1)+\mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\dim(\mathcal{N}(T_1)\cap\mathcal{I}(T_2)) = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_2) - \dim(\mathcal{N}(T_1)+\mathcal{I}(T_2)) = 1+2-3=0.$$

(iv) Como $(1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)$ e $(0,1) = -\frac{1}{3}(2,1)+\frac{2}{3}(1,2)$, tem-se

$$\begin{aligned} T_2(1,0) &= T_2\left(\frac{2}{3}(2,1)-\frac{1}{3}(1,2)\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} \frac{2}{3}T_2(2,1)-\frac{1}{3}T_2(1,2) = \\ &= \frac{2}{3}(2,1,1)-\frac{1}{3}(1,1,2) = \left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) = \left(1,\frac{1}{3},0\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(0,1) &= T_2\left(-\frac{1}{3}(2,1)+\frac{2}{3}(1,2)\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} -\frac{1}{3}T_2(2,1)+\frac{2}{3}T_2(1,2) = \\ &= -\frac{1}{3}(2,1,1)+\frac{2}{3}(1,1,2) = \left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \left(0,\frac{1}{3},1\right) \end{aligned}$$

Logo, a matriz $M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(v) A matriz $M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T_1 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T_1(1,0,0)=(2,0), \quad T_1(0,1,0)=(1,1) \quad \text{e} \quad T_1(0,0,1)=(0,2).$$

Logo, a matriz que representa $T_1 \circ T_2$ em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M(T_1\circ T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se

$$(T_1\circ T_2)(x,y) = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, como a matriz $\begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}$ é invertível, a solução geral da equação $(T_1 \circ T_2)(x, y) = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$, é dada

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/16 & -1/16 \\ -1/16 & 7/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

26.

$$T(1,0,0) = (0,1,0), T(0,1,0) = (0,1,0), T(0,0,1) = (0,0,1),$$

Como

$$L(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}) = \mathbb{R}^3$$

e T é linear então

$$\mathcal{I}(T) = L(\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}) = L(\{(0,1,0),(0,0,1)\}).$$

Além disso, uma vez que o conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente é então uma base para $\mathcal{I}(T)$. Por outro lado, como

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) \Leftrightarrow 3 = \dim \mathcal{N}(T) + 2 \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(T) = 1 \neq 0$$

então T não é injectiva.

27. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3$ definida por

$$T(1,1,-1) = 2 + 2t^2, \quad T(1,-1,1) = -t - t^3 \quad \text{e} \quad T(-1,1,1) = 2 + t + 2t^2 + t^3.$$

(i) Determinemos a expressão geral de T, isto é, determinemos $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Como $\{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, existem escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,-1) + \beta(1,-1,1) + \gamma(-1,1,1).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 2 & 0 & z+x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & 2 & y+z \end{array}\right],$$

tem-se

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = x \\ -2\beta + 2\gamma = y - x \\ 2\gamma = y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(x+y) \\ \beta = \frac{1}{2}(x+z) \\ \gamma = \frac{1}{2}(y+z). \end{cases}$$

Logo
$$(x,y,z)=\frac{1}{2}(x+y)(1,1,-1)+\frac{1}{2}(x+z)(1,-1,1)+\frac{1}{2}(y+z)(-1,1,1),$$
e assim, como T é linear,
$$T(x,y,z)=\frac{1}{2}(x+y)\,T(1,1,-1)+\frac{1}{2}(x+z)\,T(1,-1,1)+\frac{1}{2}(y+z)\,T(-1,1,1)=$$
$$=\frac{1}{2}(x+y)\left(2+2t^2\right)+\frac{1}{2}(x+z)\left(-t-t^3\right)+\frac{1}{2}(y+z)\left(2+t+2t^2+t^3\right)=$$
$$=x+2y+z+\frac{1}{2}(y-x)\,t+(x+2y+z)\,t^2+\frac{1}{2}(y-x)\,t^3.$$

(ii) Tem-se $\mathcal{N}(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:T(x,y,z)=\mathbf{0}\}=$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x+2y+z+\frac{1}{2}(y-x)\,t+(x+2y+z)\,t^2+\frac{1}{2}(y-x)\,t^3=0+0t+0t^2+0t^3\right\}=$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x+2y+z=0\quad\text{e}\quad\frac{1}{2}(y-x)=0\right\}=$$
$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x=y\quad\text{e}\quad z=-3y\right\}=\left\{y(1,1,-3)\in\mathbb{R}^3:y\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(1,1,-3)\}\right)$$
Logo, o conjunto $\{(1,1,-3)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e $\dim\mathcal{N}(T)=1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0,0)\}$.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

Como $\{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, tem-se
$$\mathcal{I}(T)=L\left(\{T(1,1,-1),T(1,-1,1),T(-1,1,1)\}\right)=L\left(\left\{2+2t^2,-t-t^3,2+t+2t^2+t^3\right\}\right).$$
Como:
$$\begin{bmatrix}2&0&2\\0&-1&1\\2&0&2\\0&-1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&0&2\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$
então o conjunto $\{2+2t^2,-t-t^3\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Logo, tem-se $\dim\mathcal{I}(T)=2$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathcal{P}_3$ e $\dim\mathcal{P}_3=4$ então $\mathcal{I}(T)\neq\mathcal{P}_3$, isto é, T não é sobrejectiva.

(iv) Atendendo a ter-se
$$T(1,1,-1)=2+2t^2,\quad T(1,-1,1)=-t-t^3\quad\text{e}\quad T(-1,1,1)=2+t+2t^2+t^3.$$

$$1+t+t^2+t^3 = \underbrace{2+t+2t^2+t^3}_{=T(-1,1,1)} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(2+2t^2\right)}_{=T(1,1,-1)} = T(-1,1,1) - \frac{1}{2}T(1,1,-1) \underset{T \text{ é linear}}{=}$$

$$= T\left((-1,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,-1)\right) = T\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é uma solução particular da equação linear $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$.

Como, a solução geral de $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3\right) + \left(\text{Solução geral de } T(x,y,z) = \mathbf{0}\right)$$

e como a solução geral de $T(x,y,z) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} = L\left(\{(1,1,-3)\}\right)$$

então, a solução geral de $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$ é dada por:

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + L\left(\{(1,1,-3)\}\right) = \left\{\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + s(1,1,-3) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

28. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_\lambda(x,y,z) = z - y + \lambda\,(y-x)\,t + xt^2.$$

(i) Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T_\lambda) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_\lambda(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - y + \lambda\,(y-x)\,t + xt^2 = 0 + 0t + 0t^2\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y \quad \text{e} \quad (y = x \ \text{ ou } \ \lambda = 0) \quad \text{e} \quad x = 0\right\} = \\
&= \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y \quad \text{e} \quad (y = 0 \ \text{ ou } \ \lambda = 0)\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \{(0,0,0)\} & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ \{y(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} & \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \{(0,0,0)\} & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ L\left(\{(0,1,1)\}\right) & \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Logo, se $\lambda = 0$ então $\{(0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T_0)$ e assim T_0 não é injectiva.

$$\dim \mathcal{N}(T_\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Logo, como $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{(0,0,0)\}$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então T_λ é injectiva, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(ii) Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$T_\lambda(x,y,z) = z - y + \lambda\,(y-x)\,t + xt^2 = z + x\left(-\lambda t + t^2\right) + y\left(-1 + \lambda t\right)$$

Logo,

$$\mathcal{I}(T_\lambda) = \left\{T_\lambda(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{z + x\left(-\lambda t + t^2\right) + y\left(-1+\lambda t\right) : x,y,z \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= L\left(\left\{1, -\lambda t + t^2, -1 + \lambda t\right\}\right) = \begin{cases} L\left(\{1, -\lambda t + t^2, -1+\lambda t\}\right) & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ L\left(\{1, t^2\}\right) \quad \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda \neq 0$ então o conjunto $\{1, -\lambda t + t^2, -1 + \lambda t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T_\lambda)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}(T_\lambda)$.

Se $\lambda = 0$ então o conjunto $\{1, t^2\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T_0)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}(T_0)$.

Logo

$$\dim \mathcal{I}(T_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ 2 & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Como $\mathcal{I}(T_\lambda)$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2$ e neste caso ($\lambda \neq 0$) $\dim \mathcal{I}(T_\lambda) = \dim \mathcal{P}_2$, então $\mathcal{I}(T_\lambda) = \mathcal{P}_2$, isto é, T_λ é sobrejectiva se $\lambda \neq 0$.

Se $\lambda = 0$, como $\mathcal{I}(T_0) \neq \mathcal{P}_3$, T_0 não é sobrejectiva.

Note que: para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_\lambda) + \dim \mathcal{I}(T_\lambda),$$

(iii) Considere $\lambda = 0$ e resolva a equação linear $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$. Atendendo a ter-se $T_0(1,0,1) = 1 + t^2$ então $(1,0,1)$ é uma solução particular da equação linear $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$.

Como, a solução geral de $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } T_0(x,y,z) = 1 + t^2\right) + \left(\text{Solução geral de } T_0(x,y,z) = \mathbf{0}\right)$$

e como a solução geral de $T_0(x,y,z) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T_0) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_0(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} = L\left(\{(0,1,1)\}\right)$$

então, a solução geral de $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$ é dada por:

$$(1,0,1) + L\left(\{(0,1,1)\}\right) = \{(1,0,1) + s(0,1,1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

29. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\left(p\left(t\right)\right) = p'\left(t\right) - 2p\left(t\right),$$

onde $p'(t)$ é a derivada de primeira ordem de $p(t)$.

(i) Seja $p(t) \in \mathcal{P}_2$. Tem-se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)' - 2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) =$$

$$= a_1 + 2a_2 t - 2a_0 - 2a_1 t - 2a_2 t^2 = -2a_0 + a_1 + (2a_2 - 2a_1)\,t - 2a_2 t^2.$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é dada por:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = -2a_0 + a_1 + (2a_2 - 2a_1)\,t - 2a_2 t^2.$$

(ii) Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$. Determinemos a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

Como

$$T(1) = 0 - 2 = -2, \qquad T(t) = 1 - 2t, \qquad T\left(t^2\right) = 2t - 2t^2$$

tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(iii) Como a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é invertível, pois $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ é invertível então T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo. Sendo T um isomorfismo, T^{-1} também é um isomorfismo.

Seja $p(t) \in \mathcal{P}_2$. Tem-se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Tem-se

$$-\frac{1}{2}p(t) - \frac{1}{4}p'(t) - \frac{1}{8}p''(t) = -\frac{1}{2}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) - \frac{1}{4}(a_1 + 2a_2 t) - \frac{1}{8}2a_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + \left(-\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right)t - \frac{a_2}{2}t^2 \qquad (*)$$

e

$$(M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}))^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 \\ -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \\ -\frac{1}{2}a_2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$T^{-1}(p(t)) = -\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + \left(-\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right)t - \frac{a_2}{2}t^2 \qquad (**)$$

Atendendo a (*) e a (**) conclui-se que a expressão geral do isomorfismo T^{-1} é dada por

$$T^{-1}(p(t)) = -\frac{1}{2}p(t) - \frac{1}{4}p'(t) - \frac{1}{8}p''(t)$$

para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

(iv) Tem-se

$$p'(t) - 2p(t) = (2-3t)^2 \Leftrightarrow T(p(t)) = (2-3t)^2 \underset{T \text{ é um isomorfismo}}{\Leftrightarrow} p(t) = T^{-1}\left((2-3t)^2\right) \underset{\text{(iii)}}{=}$$

$$\underset{\text{(iii)}}{=} -\frac{1}{2}\left((2-3t)^2\right) - \frac{1}{4}(2(2-3t)(-3)) - \frac{1}{8}(2(-3)(-3)) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{9}{2}t^2.$$

Logo,

$$p(t) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{9}{2}t^2$$

é a única solução da equação diferencial linear $p'(t) - 2p(t) = (2-3t)^2$.

30. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(t)) = t^2 p''(t) - 2p(t),$$

onde $p''(t)$ é a derivada de segunda ordem de $p(t)$.

(i) Seja $p(t) \in \mathcal{P}_2$. Tem-se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = t^2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)'' - 2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) =$$

$$= t^2 2a_2 - 2a_0 - 2a_1 t - 2a_2 t^2 = -2a_0 - 2a_1 t.$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é dada por:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = -2a_0 - 2a_1 t.$$

(ii) Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$. Determinemos a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

Como

$$T(1) = 0 - 2 = -2, \qquad T(t) = -2t, \qquad T\left(t^2\right) = 2t^2 - 2t^2 = 0$$

tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) Uma base para $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}(M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(0,0,1)\}),$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L(\{(0,0,1)\})\right\} = L\left(\left\{t^2\right\}\right).$$

Como $\{t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : t^2 2a_2 - 2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : -2a_0 - 2a_1 t = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0 \text{ e } a_1 = 0\right\} = L\left(\left\{t^2\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como $\{t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L(\{-2, -2t, 0\}) = L(\{-2, -2t\}).$$

Uma vez que o conjunto $\{-2, -2t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{-2, -2t\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

(iv) (a) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t$.

Como

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $-1 + \dfrac{1}{2}t$ é uma solução particular da equação diferencial linear $t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t$.

Como a solução geral de $t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t\right) + \left(\text{Solução geral de } t^2 p''(t) - 2p(t) = \mathbf{0}\right)$$

e como a solução geral de $t^2 p''(t) - 2p(t) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{t^2\right\}\right),$$

então a solução geral de $t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t$ é dada por:

$$-1 + \frac{1}{2}t + L\left(\left\{t^2\right\}\right) = \left\{-1 + \frac{1}{2}t + at^2 : a \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t$.

Seja $T_1(p(t)) = 2tp'(t) - 2p(0)$, em que $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Logo

$$T_1(p(t)) = 2tp'(t) - 2p(0) = 2t(a_1 + 2a_2 t) - 2a_0 = -2a_0 + 2a_1 t + 4a_2 t^2$$

Como

$$M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T_1(1) = -2$, $T_1(t) = 2t$, $T_1(t^2) = 4t^2$, onde $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ é a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$

Logo

$$2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t \Leftrightarrow T_1(p(t)) = 2 - t \Leftrightarrow M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}) \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\underset{M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}) \text{ é invertível}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \left(M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B})\right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é, a solução geral de

$$2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t$$

é:

$$\left\{-1 - \frac{1}{2}t\right\}.$$

Verificação:

$$T_1\left(-1 - \frac{1}{2}t\right) = 2t\left(-1 - \frac{1}{2}t\right)' - 2\left(-1 - \frac{1}{2}0\right) = 2t\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 2 - t.$$

Nota importante: Como

$$\dim \mathcal{N}(T_1) = \dim \mathcal{N}\left(M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B})\right) = 0$$

então T_1 é injectiva e tendo-se

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathcal{I}(T_1),$$

então $\mathcal{I}(T_1) = \mathbb{R}^3$, isto é, T_1 é sobrejectiva e uma base para $\mathcal{I}(T_1)$ é por exemplo

$$\mathcal{B} = \left\{1, t, t^2\right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$.

Cálculo alternativo de uma base de $\mathcal{I}(T_1)$:
Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Como

$$T_1(p(t)) = T_1\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = 2tp'(t) - 2p(0) = -2a_0 + 2a_1 t + 4a_2 t^2$$

então

$$\mathcal{I}(T_1) = \{T_1(p(t)) : p(t) \in \mathcal{P}_2\} = L\left(\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}\right).$$

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T_1) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}\right)$$

e sendo o conjunto $\{-2, 2t, 4t^2\}$ linearmente independente então

$$\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T_1)$, tendo-se

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathcal{N}(T_1) + 3 \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(T_1) = 0,$$

isto é, T_1 é injectiva.

31. Seja U o subespaço das matrizes simétricas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, isto é,

$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\right\}.$$

Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T(A) = AB + BA$$

com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in U$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix}$$

Logo, a expressão geral de $T : U \to U$ é dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix}.$$

(ii) Determinemos uma base para U e a matriz que representa T em relação a essa base.

Seja $A \in U$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Como o conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

gera U e é linearmente independente, então $\mathcal{B}$ é uma base de U. Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

então a matriz que representa T em relação à base $\mathcal{B}$ é dada por:

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Uma base para $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}(M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1, 0, -1)\}),$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in U : (a, b, c) \in L(\{(1, 0, -1)\}) \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}\right).$$

Como $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in U : T(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
& \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in U : A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in U : \begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in U : 2b = 0 \quad \text{e} \quad a + c = 0 \right\} = \\
&= \left\{ A = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right) = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Como $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ gera U, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= L\left(\left\{ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right\} \right) = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right) = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Uma vez que o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim U = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq U$, pelo que T não é sobrejectiva.

(iv) Resolva, em U, a equação linear $T(A) = B$.

Como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$$

então $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma solução particular da equação linear $T(A) = B$.

Como a solução geral de $T(A) = B$ é dada por:

$$\text{(Solução particular de } T(A) = B) + \text{(Solução geral de } T(A) = \mathbf{0})$$

e como a solução geral de $T(A) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

então a solução geral de $T(A) = B$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}.$$

32. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ cuja matriz $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ que a representa em relação às bases ordenadas

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, t+t^2, t^2+t^3, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

(i) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. De (*), tem-se

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= 1+t \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2 = 1+2t+t^2 \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2+t^2+t^3 = 1+2t+2t^2+t^3 \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2+t^2+t^3+t^3 = 1+2t+2t^2+2t^3
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= -\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

então

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{aligned} = \; & a\left(\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) - \frac{2}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\ & +b\left(\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) - \frac{2}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\ & +c\left(\frac{1}{3}(1+t) - \frac{2}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\ & +d\left(-\frac{2}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) \end{aligned}$$

$$= a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t^2\right) + b\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t^2 - t^3\right) + c\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}t^2 + t^3\right) + d\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t + \frac{5}{3}t^2 + t^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d\right)t + \left(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c + \frac{5}{3}d\right)t^2 + (-b+c+d)\,t^3$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ é dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d\right)t + \left(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c + \frac{5}{3}d\right)t^2 + (-b+c+d)\,t^3.$$

(ii) Como a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ é invertível, pois $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ é invertível então T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo. Sendo T um isomorfismo, T^{-1} também é um isomorfismo.

Determinemos a expressão geral do isomorfismo T^{-1}, isto é, determinemos

$$T^{-1}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right).$$

Primeiro determinemos $M(T; \mathcal{B}^c_{2\times 2}; \mathcal{B}^c_3)$, onde

$$\mathcal{B}^c_{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{B}^c_3 = \left\{1, t, t^2, t^3\right\}$$

são respectivamente as bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{P}_3$.

Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}^c_{2\times 2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_3^c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa T em relação às bases $\mathcal{B}_{2\times 2}^c$ e $\mathcal{B}_3^c$ é dada por:

$$M(T;\mathcal{B}_{2\times 2}^c;\mathcal{B}_3^c) = S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_3^c} M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_{2\times 2}^c}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que a expressão geral de T obtida na alínea (i) pode ser obtida através da matriz $M(T;\mathcal{B}_{2\times 2}^c;\mathcal{B}_3^c)$ anterior:

as coordenadas de $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right)$ na base $\mathcal{B}_3^c$ são dadas por

$$M(T;\mathcal{B}_{2\times 2}^c;\mathcal{B}_3^c)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d \\ \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{5}{3}d \\ c - b + d \end{bmatrix}.$$

Logo

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{4}{3}d\right)t+\left(-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c+\frac{5}{3}d\right)t^2+(-b+c+d)\,t^3$$

Seja $p(t) \in \mathcal{P}_3$, isto é, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, com $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Atendendo a que as coordenadas de $T^{-1}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$ em relação à base $\mathcal{B}_{2\times 2}^c$ são dadas por:

$$\left(M(T;\mathcal{B}_{2\times 2}^c;\mathcal{B}_3^c)\right)^{-1}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 - a_0 - 2a_2 + a_3 \\ 2a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ 3a_0 - 2a_1 + a_2 \\ a_1 - a_0 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$T^{-1}\left(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right)=(2a_1-a_0-2a_2+a_3)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+$$

$$+(2a_0-a_1+a_2-a_3)\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+(3a_0-2a_1+a_2)\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+(a_1-a_0)\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2a_1-a_0-2a_2+a_3 & 2a_0-a_1+a_2-a_3\\ 3a_0-2a_1+a_2 & a_1-a_0\end{bmatrix}.$$

Ou seja, a expressão geral do isomorfismo $T^{-1}:\mathcal{P}_3\to\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ é dada por:

$$T^{-1}\left(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right)=\begin{bmatrix}2a_1-a_0-2a_2+a_3 & 2a_0-a_1+a_2-a_3\\ 3a_0-2a_1+a_2 & a_1-a_0\end{bmatrix}.$$

Tem-se de facto:

$$T^{-1}\circ T=I_{\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})}\qquad\text{e}\qquad T\circ T^{-1}=I_{\mathcal{P}_3}.$$

(iii) Atendendo à alínea anterior, a solução geral da equação linear

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=1+2t+3t^2+4t^3$$

é dada por:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=T^{-1}\left(1+2t+3t^2+4t^3\right)=\begin{bmatrix}4-1-6+4 & 2-2+3-4\\ 3-4+3 & 2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}.$$

33. Seja U o espaço linear das funções reais de variável real duas vezes diferenciável. Considere a transformação linear $T:U\to U$ definida por

$$T(f)=f''-2f'+f.$$

Considere o subespaço $S=\{f\in U: f''-2f'+f=\mathbf{0}\}$ de U.

(i) Mostre que o conjunto $\{e^t,te^t\}$ é uma base de S. Sugestão: Mostre que se $f\in S$, então $f(t)\,e^{-t}$ é um polinómio de grau menor ou igual a 1.

Seja $f\in S$. Como

$$\begin{aligned}\left(f(t)\,e^{-t}\right)'' &= \left(f'(t)\,e^{-t}-f(t)\,e^{-t}\right)'=f''(t)\,e^{-t}-f'(t)\,e^{-t}-f'(t)\,e^{-t}+f(t)\,e^{-t}=\\ &=\left(f''(t)-2f'(t)+f(t)\right)e^{-t}\underset{f\in S}{=}\mathbf{0}\end{aligned}$$

então existe $c\in\mathbb{R}$ tal que para todo o $t\in\mathbb{R}$

$$\left(f(t)\,e^{-t}\right)'=c.$$

Assim, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$f(t)\, e^{-t} = ct + d \in \mathcal{P}_1 = L(\{1, t\}).$$

Logo

$$f(t) \in L\left(\left\{e^t, te^t\right\}\right).$$

Tem-se assim:

$$S = L\left(\left\{e^t, te^t\right\}\right),$$

onde o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é linearmente independente uma vez que o conjunto $\{1, t\}$ é linearmente independente.

Logo o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S.

(ii) Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Sejam $f, g \in S$ tais que

$$f(0) = g(0) = a \quad \text{e} \quad f'(0) = g'(0) = b.$$

Como $S = L(\{e^t, te^t\})$, existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(t) = \alpha_1 e^t + \beta_1 te^t \quad \text{e} \quad g(t) = \alpha_2 e^t + \beta_2 te^t.$$

Como $f(0) = g(0) = a$ tem-se

$$a = f(0) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad a = g(0) = \alpha_2.$$

Logo

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Por outro lado, como $f'(0) = g'(0) = b$,

$$b = f'(0) = \left(\alpha_1 e^t + \beta_1 te^t\right)'_{t=0} = \left(\alpha_1 e^t + \beta_1 e^t + \beta_1 te^t\right)_{t=0} = \alpha_1 + \beta_1$$

e

$$b = g'(0) = \left(\alpha_2 e^t + \beta_2 te^t\right)'_{t=0} = \left(\alpha_2 e^t + \beta_2 e^t + \beta_2 te^t\right)_{t=0} = \alpha_2 + \beta_2$$

Assim,

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$$

e uma vez que $\alpha_1 = \alpha_2$, então

$$\beta_1 = \beta_2.$$

Deste modo, para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha_1 e^t + \beta_1 te^t = \alpha_2 e^t + \beta_2 te^t = g(t),$$

isto é,

$$f = g.$$

Pelo que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

(iii) Determine a única solução f da equação diferencial linear $T(f) = 1$ que verifica $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

A função identicamente igual a $1 : f = 1$ ($f(t) = 1$,para todo o $t \in \mathbb{R}$) é uma solução particular de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}.$$

Atendendo à alínea anterior, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Como

$$f(t) = \alpha e^t + \beta t e^t$$

e

$$0 = f(0) = \alpha \quad \text{e} \quad 0 = f'(0) = \beta$$

então

$$f(t) = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, é a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = \mathbf{0} \quad \text{e } f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}$$

Como a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}.$$

é dada por:

$$\begin{array}{l}(\text{Solução particular de } \{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}) + \\ + (\text{Solução geral de } \{f \in U : T(f) = \mathbf{0} \quad \text{e } f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}),\end{array}$$

então a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}$$

é dada por:

$$f(t) = 1,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$.

34. (i) $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(ii) Como $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ é invertível então T é invertível e

$$T(u) = (2, -3, 3, -2) \Leftrightarrow u = T^{-1}(2, -3, 3, -2).$$

Como

$$M(T^{-1}; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

então atendendo a que as coordenadas de $(2,-3,3,-2)$ em $\mathcal{B}$ são 2 e -3 pois $(2,-3,3,-2)=2v_1-3v_2$, tem-se que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$. Logo

$$T(u)=(2,-3,3,-2)\Leftrightarrow u=-3v_1-2v_2=(-3,-2,2,3),$$

ou seja $u=(-3,-2,2,3)$ é a única solução da equação linear $T(u)=(2,-3,3,-2)$.

(iii) Como

$$R(1,0,0,0)=R(v_1)+R(w_2)=v_2=(0,1,-1,0),$$

$$R(0,1,0,0)=R(v_2)+R(w_1)-R(w_2)=-v_1=(-1,0,0,1),$$
$$R(0,0,1,0)=R(w_1)-R(w_2)=(0,0,0,0)$$

e

$$R(0,0,0,1)=R(w_2)=(0,0,0,0)$$

então, sendo $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$,

$$M(R;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$R(u)=(2,-3,3,-2)\Leftrightarrow M(R;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)u=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u\in\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:-b=2,\ a=-3,\ c,d\in\mathbb{R}\right\}=\{(-3,-2,c,d):c,d\in\mathbb{R}\}.$$

Isto é, a solução geral de R

$$(u)=(2,-3,3,-2)$$

é:

$$\{(-3,-2,c,d):\ c,d\in\mathbb{R}\}.$$

35. a) $\mathcal{N}(T)=\mathcal{N}(M(T;B_c;B'))=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=$

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:-x+2z=0\ \text{ e }\ y+5z=0\right\}=\left\{(2z,-5z,z)\in\mathbb{R}^3:z\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(2,-5,1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(2,-5,1)\}$ gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente então é uma base de $\mathcal{N}(T)$.

Logo $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

b) Como $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L(\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}).$$

Atendendo a que

$$\begin{array}{rcl} T(1,0,0) & = & -(1,1,0)) + 1(1,-1,1) + 4(0,1,1) = (0,2,5), \\ T(0,1,0) & = & 0(1,1,0)) + 1(1,-1,1) + 2(0,1,1) = (1,1,3), \\ T(0,0,1) & = & 2(1,1,0)) + 3(1,-1,1) + 2(0,1,1) = (5,1,5) \end{array}$$

e $\dim \mathcal{I}(T) = \operatorname{car} M(T; B_c; B') = 2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L(\{(0,2,5),(1,1,3),(5,1,5)\}) = L(\{(0,2,5),(1,1,3)\})$$

uma vez que $\{(0,2,5),(1,1,3)\}$ é linearmente independente, é assim uma base de $\mathcal{I}(T)$.

c) Atendendo à alínea anterior, tem-se

$$\begin{array}{rcl} T(x,y,z) & = & M(T; B_c; B_c) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ & = & (y+5z, 2x+y+z, 5x+3y+5z), \end{array}$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

36. a) Como $B = \{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L(\{1, 4t\}).$$

Como $\{1, 4t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, é assim uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como

$$\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{N}(M(T_1; B; B)) = \operatorname{nul}(M(T_1; B; B)) = 3 - \operatorname{car}(M(T_1; B; B)) = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

então T não é injectiva.

b) $T_2(p(t)) = \dfrac{1}{2} + 2t \Leftrightarrow (tp'(t))' = \dfrac{1}{2} + 2t \Leftrightarrow \left(t\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)'\right)' = \dfrac{1}{2} + 2t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_1 + 4a_2 t = \frac{1}{2} + 2t \Leftrightarrow \left(a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a_0 \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow p(t) \in \left\{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right\} + L(\{1\}).$$

37. a) Sendo $B = \{1, t, t^2\}$, como $T(1) = 2$, $T(t) = -t$ e $T(t^2) = -2t^2$ então

$$M(T; B; B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{2, -t, -2t^2\right\}\right) = L\left(\left\{1, t, t^2\right\}\right) = \mathcal{P}_2$$

e $\dim \mathcal{I}(T) = 3$, uma vez que $\{1, t, t^2\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ (contradomínio de T). Como

$$3 = \dim \mathcal{P}_2 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{N}(T) + 3 \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(T) = 0$$

então T é injectiva.

38. a)

$$\mathcal{N}(M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\} = \left\{(2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Logo

$$\mathcal{N}(T) = \{(2y - z)(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) + z(1, 1, 0) : y, z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(2y, y + z, 3y - z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(2, 1, 3), (0, 1, -1)\}).$$

Como o conjunto $\{(2, 1, 3), (0, 1, -1)\}$ gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente então é uma base de $\mathcal{N}(T)$.

Logo $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Como

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) \Leftrightarrow 3 = 2 + \dim \mathcal{I}(T) \Leftrightarrow \dim \mathcal{I}(T) = 1$$

então $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ e como tal T não é sobrejectiva.

b) Como

$$T(1, 0, 1) = 1(1, -1) + (-2)(1, 1) = (-1, -3) \Leftrightarrow T\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

a solução geral de $T(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é dada por:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)\right\} + \mathcal{N}(T) =$$

$$= \left\{\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) + s(2, 1, 3) + t(0, 1, -1) : s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

39. a) Como
$$\dim \mathcal{I}(T_2) = \operatorname{car}\left(M\left(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}\right)\right) = 2 = \dim \mathcal{P}_1$$
então T_2 é sobrejectiva e assim a base canónica $\mathcal{B}_c^2 = \{1, t\}$ de $\mathcal{P}_1$ é uma base para o contradomínio de T_2.

b) Como
$$M\left(T_1 \circ T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = M\left(T_1; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2\right) M\left(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
é invertível, então $T_1 \circ T_2$ é invertível e
$$M\left((T_1 \circ T_2)^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$
Além disso
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{=M\left((T_1 \circ T_2)^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a_0 \\ \frac{1}{3}a_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (T_1 \circ T_2)^{-1}(a_0 + a_1 t) = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}a_1 t$$
pelo que a solução de
$$(T_1 \circ T_2)(p(t)) = 3 + 3t$$
é única e dada por
$$p(t) = (T_1 \circ T_2)^{-1}(3 + 3t) = 1 + t.$$

40. a) Seja $\mathcal{B} = \{\operatorname{sen} x, \cos x, e^x\}$ uma base ordenado de U, uma vez que por um ex^o da ficha 4 o conjunto anterior é linearmente independente. Então
$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
uma vez que
$$T(\operatorname{sen} x) = \cos x, \quad T(\cos x) = -\operatorname{sen} x, \quad T(e^x) = e^x.$$
Logo
$$\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$$
e portanto T é injectiva.

b) Como
$$U = L(\{\operatorname{sen} x, \cos x, e^x\})$$
e
$$T(\operatorname{sen} x) = \cos x, \quad T(\cos x) = -\operatorname{sen} x, \quad T(e^x) = e^x$$

então $T(U) \subset U$.

c) $\{\operatorname{sen} x, \cos x, e^x\}$ é uma base para U.

d) Como
$$T(-\cos x + e^x) = \operatorname{sen} x + e^x$$
e $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ então a solução geral da equação linear
$$T(f(x)) = \operatorname{sen} x + e^x$$
é
$$\{-\cos x + e^x\}.$$

41. $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ é do tipo 2×2 e car $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = 2$ logo T é invertível e
$$M\left(T^{-1};\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_1\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
então
$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow p(t) = T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p(t) = 0\,(1+t) + (-1)\,(1-t) = -1 + t.$$
Logo, a solução geral de $T(p(t)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é
$$\{-1 + t\}.$$

42. (i) Como $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{P}_2$ então
$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T_1) &= L\left(\left\{T_1\left(1-t^2\right), T_1(1-t), T_1(2-t)\right\}\right) = \\ &= L(\{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,0,-1)\}) = \\ &= L(\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}). \end{aligned}$$

Como $\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}$ é linearmente independente então $\dim \mathcal{I}(T_1) = 2$ e
$$\dim \mathcal{N}(T_1) = \dim \mathcal{P}_2 - \dim \mathcal{I}(T_1) = 3 - 2 = 1 \neq 0$$
logo T_1 não é injectiva.

(ii)

$$M\left(T_1;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3\right)=M\left(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^3\right)S_{\mathcal{B}_c\to\mathcal{B}}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&-1\\-1&0&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Como

$$M\left(T_1;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3\right)\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0+a_1\\-a_0-2a_1\\a_1\end{bmatrix}$$

então

$$T_1\left(a_0+a_1t+a_2t^2\right)=(a_0+a_1,-a_0-2a_1,a_1)\,,$$

para todos os $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}^3$.

(iii)

$$\dim\mathcal{I}\left(T_2\right)=\dim\mathcal{C}\left(M\left(T_2;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2\right)\right)=\operatorname{car}\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}=2=\dim\mathcal{P}_1$$

logo T_2 é sobrejectiva.

(iv)

$$M\left(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_2\right)=M\left(T_2;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2\right)S_{\mathcal{B}_c^3\to\mathcal{B}_1}=$$

$$=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

logo

$$M\left(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_2\right)=M\left(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_2\right)M\left(T_1;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-4&0\\-1&-3&0\end{bmatrix}.$$

Como

$$\mathcal{I}\left(T_2\circ T_1\right)=L\left(\{(-1)\left(1-t\right)+(-1)\left(1+t\right),(-4)\left(1-t\right)+(-3)\left(1+t\right)\}\right)=$$

$$=L\left(\{-2,-7+t\}\right)$$

e $\{-2,-7+t\}$ é linearmente independente então $\{-2,-7+t\}$ é uma base para $\mathcal{I}\left(T_2\circ T_1\right)$.

Como

$$\mathcal{N}\left(M\left(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_2\right)\right)=\mathcal{N}\begin{bmatrix}-1&-4&0\\0&1&0\end{bmatrix}=L\left(\{(0,0,1)\}\right)$$

então uma base para $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$ é por exemplo: $\{t^2\}$

(v) Como

$$t = -\frac{7}{2}(-2) + (-7+t) =$$

$$= -\frac{7}{2}(T_2 \circ T_1)(1) + (T_2 \circ T_1)(t) =$$

$$= (T_2 \circ T_1)\left(-\frac{7}{2} + t\right)$$

então a solução geral de $(T_2 \circ T_1)(p(t)) = t$ é dada por:

$$\left\{-\frac{7}{2} + t + \alpha t^2 : \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

43. a)

$$\mathcal{N}(T_1) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T_1(x,y,z,w) = 0 + 0t + 0t^2\right\} =$$

$$= \{(2z, 2w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} = L(\{(2,0,1,0), (0,2,0,1)\})$$

e como $\{(2,0,1,0), (0,2,0,1)\}$ é linearmente independente é então uma base para $\mathcal{N}(T_1)$.

b) Como $\dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathcal{N}(T_1) = 2 \neq 3 = \dim \mathcal{P}_2$ então T_1 não é sobrejectiva.
Resolução alternativa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T_1) &= \left\{T_1(x,y,z,w) : (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4\right\} = \\
&= \left\{-x + 2z + (-y + 2w)\,t + (x - 2z)\,t^2 : x,y,z,w \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= \left\{x\left(-1+t^2\right) + y\,(-t) + z\left(2 - 2t^2\right) + w\,(2t) : x,y,z,w \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= L\left(\left\{-1+t^2, -t, 2-2t^2, 2t\right\}\right) = L\left(\left\{-1+t^2, -t\right\}\right)
\end{aligned}$$

e como $\{-1+t^2, -t\}$ é linearmente independente é então uma base para $\mathcal{I}(T_1)$. Logo

$$\dim \mathcal{I}(T_1) = 2 \neq 3 = \dim \mathcal{P}_2$$

e então T_1 não é sobrejectiva.

c) Como $T_1(1,0,0,0) = -1 + t^2$, então, a solução geral de

$$T_1(x,y,z,w) = -1 + t^2$$

é dada por:

$$\{(1,0,0,0)\} + \mathcal{N}(T_1) = \{(1+2\alpha, 2\beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Resolução alternativa:

$$T_1(x,y,z,w) = -1+t^2 \Leftrightarrow (-x+2z=-1 \;\text{ e }\; y=2w)\,.$$

Logo, a solução geral de

$$T_1(x,y,z,w) = -1+t^2$$

é dada por:

$$\{(1+2z, 2w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}\,.$$

d) Seja $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$. Tem-se

$$w_3 = T_1(1,0,0,0) = -1+t^2 \qquad \text{e} \qquad w_2 - w_3 = T_1(0,1,0,0) = -t.$$

Logo $w_2 = -1-t+t^2$ e w_1 tem que ser tal que $\{w_1, -1-t+t^2, -1+t^2\}$ seja uma base ordenada de $\mathcal{P}_2$. Assim, uma base ordenada de $\mathcal{P}_2$ nas condições do enunciado poderá ser $\mathcal{B} = \{1, -1-t+t^2, -1+t^2\}$.

44. Como $L\left(\{(1,-2,0),(-1,0,1),(0,1,-1)\}\right) = \mathbb{R}^3$ e T é linear então

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T(1,-2,0), T(-1,0,1), T(0,1,-1)\}\right) = L\left(\left\{-1+t^2, -t-t^2, -t^2\right\}\right)$$

e sendo $\{-1+t^2, -t-t^2, -t^2\}$ linearmente independente é então uma base para $\mathcal{I}(T)$ tendo-se

$$\dim \mathcal{I}(T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

pelo que T é sobrejectiva. Além disso, como

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) \Leftrightarrow 3 = \dim \mathcal{N}(T) + 3 \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(T) = 0$$

então T é injectiva. Logo T é bijectiva e a equação linear $T(x,y,z) = 1+t+t^2$ terá uma única solução.

Por outro lado:

$$\begin{aligned} 1+t+t^2 &= (-1)\left(-1+t^2\right) + (-1)\left(-t-t^2\right) + (-1)\left(-t^2\right) = \\ &= (-1)\,T(1,-2,0) + (-1)\,T(-1,0,1) + (-1)\,T(0,1,-1) = \\ &= T\left((-1)(1,-2,0) + (-1)(-1,0,1) + (-1)(0,1,-1)\right) = T(0,1,0)\,. \end{aligned}$$

Logo $(0,1,0)$ é uma solução particular de $T(x,y,z) = 1+t+t^2$ e atendendo a que T é injectiva, a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = 1+t+t^2$ é dada por: $\{(0,1,0)\}$.