Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o semestre 2017/2018

Matriz de mudança de coordenadas e transformações lineares

1. Sejam
$$B_1 = \{(1,2),(0,1)\} \quad \text{e} \quad B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$$
duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1,5)$.

   (i) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1.

   (ii) Determine $S_{B_1 \to B_2}$.

   (iii) Determine as coordenadas de v em relação à base B_2, usando as alíneas anteriores.

   (iv) Determine, directamente, as coordenadas de v em relação à base B_2.

   (v) Determine $S_{B_2 \to B_1}$.

   (vi) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1, usando a alínea anterior, e compare com o resultado obtido em **(i).**

2. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde
$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (0,1).$$
Suponha que
$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Determine B_2.

3. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde
$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$
Suponha que
$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Determine B_1.

4. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde
$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,0), \quad v_3 = (0,0,1).$$
Suponha que
$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Determine B_2.

5. Sejam

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine $S_{B_1 \to B_2}$ e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2.

6. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1, -1)$ e $(2, 2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1 + t$ e $1 - t$ em relação à base B. Determine B.

7. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1, -1)$ e $(2, 2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1, 1)$ e $(2, -2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine $S_{B_1 \to B_2}$.

8. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja

$$\mathcal{B} = \{t - t^2, -2 + 2t\}$$

uma base ordenada de um subespaço U de $\mathcal{P}_2$.

a) Determine as coordenadas do vector $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$.

b) Determine a base ordenada $\mathcal{B}_1$ de U de tal modo que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Sendo

$$V = L\left(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2, 3 - t\}\right),$$

determine, justificando, uma base para $U \cap V$.

9. Considere o seguinte subespaço linear de $\mathcal{P}_2$:

$$V = L(\{1 - t, 1 - t^2\}).$$

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de V, com

$$\mathcal{B}_1 = \{1 - t, 1 - t^2\}.$$

Considere ainda

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine as coordenadas do vector $1 - t$ em $\mathcal{B}_2$.

10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $T_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_{a,b}(x) = ax + b$. Determine os valores de a e de b para os quais $T_{a,b}$ é linear.

11. Diga quais das seguintes transformações são lineares. Determine para cada transformação linear a correspondente matriz que a representa em relação às respectivas bases canónicas (ordenadas). Determine também, se possível, para cada uma dessas transformações lineares, bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, bem como as respectivas dimensões (de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$). Diga ainda quais são injectivas, sobrejectivas e bijectivas.

    (i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$.

    (ii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (1 - y, 2x)$.

    (iii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, 2x, -x)$.

    (iv) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (0, 0)$.

    (v) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $T(x, y) = -3x$.

    (vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (0, -1, 2)$.

    (vii) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$.

    (viii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (x^2 - y, 2y)$.

    (ix) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z, w) = (x - y, 3w)$.

    (x) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com $T(x, y, z) = (-z, y - 2z, 2y, y + z)$.

    (xi) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0, 0)$.

    (xii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x + 2y, 3z, x - z)$.

    (xiii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, y, z)$.

    (xiv) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com $T(p(t)) = 2p(1 - t) - tp'(t)$,
    onde $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ e p' é a derivada de 1^a ordem de p.

    (xv) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com

    $$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\,t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\,t^2.$$

    (xvi) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

    (xvii) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(X) = \operatorname{tr}(X) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva ainda a equação linear $T(X) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

12. Determine para cada transformação linear a correspondente matriz que a representa em relação às respectivas bases canónicas (ordenadas).

    (i) $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Rotação de amplitude θ em torno da origem e no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio. Verifique ainda que se tem $T_\theta \circ T_\eta = T_{\theta+\eta}$ e $(T_\theta)^{-1} = T_{-\theta}$.

    (ii) $T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T_\theta(x, y, z) = (x, y \cos\theta - z \operatorname{sen}\theta, y \operatorname{sen}\theta + z \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Rotação de amplitude θ no plano (y, z) em torno da origem e no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio.

(iii) $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T_\theta(x,y) = (x\cos 2\theta + y \operatorname{sen} 2\theta, x \operatorname{sen} 2\theta - y\cos 2\theta)$, $\theta \in [0,\pi[$. Reflexão em relação à recta que passa na origem e que forma um ângulo de amplitude θ com a recta $y = 0$.

(iv) $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T_\theta(x,y) = (x\cos^2\theta + y \operatorname{sen}\theta\cos\theta, x \operatorname{sen}\theta\cos\theta + y \operatorname{sen}^2\theta)$, $\theta \in [0,\pi[$. Projecção sobre a recta que passa na origem e que forma um ângulo de amplitude θ com a recta $y = 0$.

(v) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (x + ky, y)$. Deslizamento em $\mathbb{R}^2$ na direcção x e de razão k. Esboce a figura $T(U)$ onde U é o quadrado unitário $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

(vi) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (x, y + kx)$. Deslizamento em $\mathbb{R}^2$ na direcção y e de razão k. Esboce a figura $T(U)$ onde U é o quadrado unitário $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

(vii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (kx, ky)$, com $k \in [0,1[$. Contração em $\mathbb{R}^2$ de razão k. Esboce a figura $T(U)$ onde U é o quadrado unitário $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

(viii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (kx, ky)$, com $k > 1$. Dilatação em $\mathbb{R}^2$ de razão k. Esboce a figura $T(U)$ onde U é o quadrado unitário $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

(ix) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (kx, y)$, com $k \in [0,1[$. Compressão em $\mathbb{R}^2$ na direcção x e de razão k. Esboce a figura $T(U)$ onde U é o quadrado unitário $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

(x) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (kx, y)$, com $k > 1$. Ampliação em $\mathbb{R}^2$ na direcção x e de razão k. Esboce a figura $T(U)$ onde U é o quadrado unitário $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz
$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Determine, se possível, bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, bem como as respectivas dimensões (de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$).

14. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(x,y,z) = (2y, y - x, -x).$$
Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada
$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ com } v_1 = (1,0,-1), \quad v_2 = (1,2,0), \quad v_3 = (-1,1,1).$$

15. Seja
$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear
$$S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } S(A) = A^T.$$
Determine a matriz $M(S; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa S em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$.

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1 = (1, 1), \quad u_2 = (2, -1), \quad v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 2), \quad v_3 = (0, 1, -1),$$

é representada pela matriz

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{B}_1' = \left\{u_1', u_2'\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2' = \left\{v_1', v_2', v_3'\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1' = (1, 0), \quad u_2' = (1, 1), \quad v_1' = (1, 0, 0), \quad v_2' = (1, 1, 0), \quad v_3' = (1, 1, 1).$$

(i) Determine as coordenadas do vector $T(-1, 2)$ na base $\mathcal{B}_2$.

(ii) Determine as coordenadas do vector $(-1, 2)$ na base $\mathcal{B}_1'$.

(iii) Determine as coordenadas do vector $T(-1, 2)$ na base $\mathcal{B}_2'$.

(iv) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(v) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(vi) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_1'; \mathcal{B}_2')$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1'$ e $\mathcal{B}_2'$.

17. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y - z).$$

(i) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação às bases canónicas (ordenadas) $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (1, 1)$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$. Verifique se existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual essa equação seja impossível.

(vi) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$. Verifique se existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual essa equação seja possível e determinada.

18. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que a representa em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (3, 3, 0)$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja impossível.

(vi) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja possível e indeterminada.

19. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que a representa em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0),$$

é dada por

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga, justificando, se T é sobrejectiva e se T é injectiva.

(ii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$.

(iii) Mostre que a equação linear $T(x, y, z) = (2, 4, 0)$ não tem soluções.

(iv) Determine $T(1, 1, 1)$ e resolva a equação linear $T(x, y, z) = (-1, -1, -\frac{1}{3})$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja possível e indeterminada.

(vi) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

20. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - 4z, z).$$

(i) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Mostre que T é injectiva e determine a expressão geral de T^{-1}, isto é, determine $T^{-1}(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Justifique que T é um isomorfismo.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (1,1,2)$.

21. Seja $\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } T(X) = AX - XA, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que T é linear.

(ii) Determine a expressão geral de T.

(iii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iv) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(v) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

22. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica ordenada $(\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0), (0,1)\})$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$M\left(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que T é injectiva e resolva a equação linear $T(x,y) = (1,2)$.

23. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T_1(x,y) = x$. Seja

$$M\left(T_2; \mathcal{B}_c^1; \mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa a aplicação linear $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases canónicas ordenadas $\mathcal{B}_c^1 = \{1\}$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Determine uma base para o núcleo: $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

24. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é sobrejectiva.

25. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T_1(x, y, z) = (2x + y, y + 2z).$$

Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(2, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

(ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.

(iii) Diga, justificando, se se tem $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$ e determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{I}(T_2)$.

(iv) Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

(v) Determine a solução geral da equação $(T_1 \circ T_2)(x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

26. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (0, x + y, z).$$

Determine, justificando, uma base para $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é injectiva.

27. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3$ definida por

$$T(1, 1, -1) = 2 + 2t^2, \quad T(1, -1, 1) = -t - t^3 \quad \text{e} \quad T(-1, 1, 1) = 2 + t + 2t^2 + t^3.$$

(i) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x, y, z) = 1 + t + t^2 + t^3$.

28. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_\lambda(x, y, z) = z - y + \lambda(y - x)t + xt^2.$$

(i) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Diga se T_λ é injectiva.

(ii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_\lambda)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T_\lambda)$. Diga se T_λ é sobrejectiva.

(iii) Considere $\lambda = 0$ e resolva a equação linear $T_0(x, y, z) = 1 + t^2$.

29. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\left(p\left(t\right)\right) = p'\left(t\right) - 2p\left(t\right),$$

onde $p'\left(t\right)$ é a derivada de primeira ordem de $p\left(t\right)$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$, determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

(iii) Justifique que T é um isomorfismo e verifique que a expressão geral do isomorfismo T^{-1} é dada por

$$T^{-1}\left(p\left(t\right)\right) = -\frac{1}{2}p\left(t\right) - \frac{1}{4}p'\left(t\right) - \frac{1}{8}p''\left(t\right)$$

para todo o $p\left(t\right) \in \mathcal{P}_2$, onde $p''\left(t\right)$ é a derivada de segunda ordem de $p\left(t\right)$.

(iv) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $p'\left(t\right) - 2p\left(t\right) = \left(2 - 3t\right)^2$.

30. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\left(p\left(t\right)\right) = t^2 p''\left(t\right) - 2p\left(t\right),$$

onde $p''\left(t\right)$ é a derivada de segunda ordem de $p\left(t\right)$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$, determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

(iii) Determine, se possível, uma base para $\mathcal{N}\left(T\right)$ e uma base para $\mathcal{I}\left(T\right)$ e diga, justificando, se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

(iv) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, as equações diferenciais lineares:

a) $t^2 p''\left(t\right) - 2p\left(t\right) = 2 - t$; **b)** $2tp'\left(t\right) - 2p\left(0\right) = 2 - t$.

31. Seja U o subespaço das matrizes simétricas de $\mathcal{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$, isto é,

$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) : A = A^T\right\}.$$

Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T\left(A\right) = AB + BA$$

com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Determine uma base para U e calcule a matriz que representa T em relação a essa base.

(iii) Determine, se possível, uma base para $\mathcal{N}\left(T\right)$ e uma base para $\mathcal{I}\left(T\right)$ e diga, justificando, se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

(iv) Resolva, em U, a equação linear $T\left(A\right) = B$.

32. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ cuja matriz $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ que a representa em relação às bases ordenadas

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, t+t^2, t^2+t^3, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Justifique que T é um isomorfismo e determine a expressão geral do isomorfismo T^{-1}, isto é, determine

$$T^{-1}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right).$$

(iii) Resolva a equação linear

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3.$$

33. Seja U o espaço linear das funções reais de variável real duas vezes diferenciáveis. Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T(f) = f'' - 2f' + f.$$

Considere o subespaço $S = \{f \in U : f'' - 2f' + f = \mathbf{0}\}$ de U.

(i) Mostre que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S. Sugestão: Mostre que se $f \in S$, então $f(t)\,e^{-t}$ é um polinómio de grau menor ou igual a 1.

(ii) Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

(iii) Determine a única solução f da equação diferencial linear $T(f) = 1$ que verifica $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

34. Seja V o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $v_1 = (1,0,0,-1)$ e $v_2 = (0,1,-1,0)$. Considere ainda a transformação linear $T : V \to V$ tal que

$$T(v_1) = v_2, \qquad T(v_2) = -v_1.$$

(i) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de V.

(ii) Encontre, em V, a solução geral da equação $T(u) = (2,-3,3,-2)$.

(iii) Sejam $w_1 = (0,0,1,1)$, $w_2 = (0,0,0,1)$ e considere a transformação linear $R : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$R(v_1) = v_2, \qquad R(v_2) = -v_1, \qquad R(w_1) = R(w_2) = (0,0,0,0).$$

Encontre, em $\mathbb{R}^4$, a solução geral da equação $R(u) = (2,-3,3,-2)$.

35. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_c = \{(1,0,0)), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,0)), (1,-1,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para o núcleo de T e indique a sua dimensão.

b) Determine uma base para o contradomínio de T e indique a sua dimensão.

c) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y,z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

36. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais.

a) Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ cuja representação matricial em relação à base ordenada $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ é dada por:

$$M(T_1; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio de T_1 e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T_1 é injectiva.

b) Considere a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_2(p(t)) = (tp'(t))',$$

onde $p'(t)$ é a derivada de 1^a ordem de $p(t)$. Resolva em $\mathcal{P}_2$, a equação linear

$$T_2(p(t)) = \frac{1}{2} + 2t.$$

37. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(t)) = 2p(0) - tp'(t),$$

onde $p'(t)$ é a derivada de 1^a ordem de $p(t)$.

a) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa a aplicação linear T em relação à base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

b) Determine uma base para o contradomínio de T e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T é injectiva.

38. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,-1), (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para o núcleo de T e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T é sobrejectiva.

b) Determine $T(1,0,1)$ e resolva em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

39. Seja $\mathcal{P}_1$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1. Considere as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definidas por

$$T_1(1+t) = 2-t, \quad T_1(1-t) = -1+2t \quad \text{e} \quad M\left(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{B}_c^2 = \{1, t\}$ e $\mathcal{B} = \{1+t, 1-t\}$ são duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$.

a) Determine uma base para $\mathcal{I}(T_2)$.

b) Resolva em $\mathcal{P}_1$ a equação linear $(T_1 \circ T_2)(p(t)) = 3+3t$.

40. Seja $C^\infty(\mathbb{R})$ o espaço linear das funções reais de variável real indefinidamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e $U = L(\{f_1, f_2, f_3\})$ o subespaço linear de $C^\infty(\mathbb{R})$ gerado pelas funções

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = e^x.$$

Seja $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definida por

$$T(f(x)) = f'(x)$$

onde f' designa a 1^a derivada de f.

a) Determine o núcleo de T e diga, justificando se T é injectiva.

b) Verifique que $T(U) \subset U$.

c) Determine uma base para U.

d) Resolva em U a equação linear $T(f(x)) = \operatorname{sen} x + e^x$.

41. Sejam

$$V = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$$

e

$$T : \mathcal{P}_1 \to V$$

uma transformação linear tal que

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

com

$$\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t\}$$

uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$ e

$$\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

uma base ordenada de V.

Resolva

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

42. Sejam $T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_1$ duas transformações lineares tais que

$$T_1\left(1-t^2\right) = (1,-1,0) \qquad T_1(1-t) = (0,1,-1) \qquad T_1(2-t) = (1,0,-1)$$

e

$$M\left(T_2; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

com

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-1), (1,-1,0), (0,1,1)\}$$

uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ e

$$\mathcal{B}_2 = \{1-t, 1+t\}$$

uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$.

(i) Diga, justificando, se T_1 é injectiva.

(ii) Determine a expressão geral de T_1.

(iii) Diga, justificando, se T_2 é sobrejectiva.

(iv) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$ e uma base para $\mathcal{I}(T_2 \circ T_1)$.

(v) Resolva em $\mathcal{P}_2$ a equação linear

$$(T_2 \circ T_1)(p(t)) = t.$$

43. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_1(x,y,z,w) = -x + 2z + (-y+2w)\,t + (x-2z)\,t^2.$$

a) Determine, justificando, uma base para $\mathcal{N}(T_1)$.

b) Diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

c) Resolva em $\mathbb{R}^4$ a equação linear $T_1(x,y,z,w) = -1 + t^2$.

d) Seja $\mathcal{B}_c^4$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Determine uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ tal que a matriz que representa T_1 relativamente a essas bases seja dada por:

$$M\left(T_1; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

44. Considere ainda a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ tal que:

$$T(1,-2,0) = -1 + t^2 \qquad T(-1,0,1) = -t - t^2 \qquad T(0,1,-1) = -t^2.$$

Resolva, justificando, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x,y,z) = 1 + t + t^2$.