# TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

LENO - MEAer - MEAmbi - MEBiol - MEEC - MEM - MEMec - MEQ

## I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

### JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

**1)** (2.0) Para cada parâmetro real $\alpha$, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha-1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & -\alpha+2 \end{array}\right].$$

Determine os valores de $\alpha$ para os quais o sistema anterior é impossível e resolva-o para $\alpha = 0$.

**2)** (2.0) Determine $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^T = 3\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2.$

**3)** (2.0) Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z=0 \quad \text{e} \quad x+z-w=0\right\},$$
$$V = L\left(\{(1,3,1,-1),(-1,6,2,-2),(5,-3,-1,1)\}\right).$$

Determine uma base para $U+V$ que inclua pelo menos um vector de $U \cap V$.

**4)** (1.0) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,-1,0) = (-1,1,-1) \qquad \text{e} \qquad T(-1,1,1) = T(0,1,0) = (1,0,1).$$

Determine, justificando, a expressão geral de $T$, isto é, determine $T(x,y,z)$, para quaisquer $x,y,z \in \mathbb{R}$.

**5)** Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T_1(x,y,z) = x - z + (x-z)t^2$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$M\left(T_2; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_c^3\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{B}_1 = \{1-t, 1+t^2, t\}$ e $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$ e de $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

**a)** (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_2)$ e diga se $T_1$ é sobrejectiva.

**b)** (1.0) Determine uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ de modo a que $M(T_1 \circ T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

**6)** (1.0) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, com $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B = n$. Mostre que $\operatorname{car}(AB) = n$.

## II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

**JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS**

**1)** (2.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 5 & -1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 6 & 3 & 0 & 4 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule $\det\left((\det A)\, A^{-3}\right)$.

**2)** (1.5) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine, se existirem, uma matriz diagonal $D$ e uma matriz invertível $P^{-1}$ tais que $D = PAP^{-1}$.

**3)** (1.5) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - w = 0 \quad \text{e} \quad 2x - z = 0\}.$$

Determine $d\left((1,2,1,2), U^{\perp}\right)$.

**4)** (1.5) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine, se existir, uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de $A$.

**5)** (1.5) Considere o subespaço $V = \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} X = 0\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere em $V$ o produto interno $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left( A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} B^T \right).$$

Considere ainda o subespaço $W = \left\{X \in V : X = X^T\right\}$ de $V$. Determine uma base ortonormada para $\{X \in V : \langle X, Y \rangle = 0, \text{ para todo } Y \in W\}$.

**6)** (2.0) Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Seja $\lambda$ um qualquer valor próprio de $A$. Mostre que existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$|\lambda - a_{ii}| \;\leq\; \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,.$$