Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Ano Lectivo 2017/2018
17 de Janeiro de 2018
Duração: 90 ou 180 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Alameda

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) (1.6) Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ \alpha & 0 & \alpha & 4 \end{array}\right].$$

Determine os valores de α para os quais o sistema anterior é possível e resolva-o para $\alpha = 1$.

2) (1.6) Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(A^T - I\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

3) (1.6) Sejam $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\}$ e $V = L(\{(1, 1, -2), (3, 4, -1)\})$. Determine uma base para $U \cap V$.

4) (1.6) Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule a entrada $(4, 3)$ de A^{-1}.

5) (1.6) Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Determine os valores próprios de A e, se existir, uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Diga se A é diagonalizável.

6) (1.0) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & b \end{bmatrix}$. Verifique se existem a e b de modo a que A e B sejam semelhantes.

7) (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA$, para todo o $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que existe um escalar λ tal que $A = \lambda I$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e os seguintes subespaços lineares

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+w=0 \quad \text{e} \quad y+z=0\}, \qquad V = L\left(\{(1,0,0,0),(0,1,1,0)\}\right).$$

a) (1.0) Determine $P_U\,(2,1,1,2)$.

b) (1.0) Determine $d\left((0,1,-1,0)\,, V^{\perp}\right)$.

c) (1.0) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores de $U^{\perp}+V$.

2) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ tal que

$$M\left(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

com $\mathcal{B} = \{(1,1)\,,(1,0)\}$ e $\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1} = \{1,t\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathcal{P}_1$ respectivamente.

a) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(T)$ e diga se T é sobrejectiva.

b) (1.0) Determine $M\left(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}\right)$, com $\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0)\,,(0,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

c) (0.5) Resolva em $\mathbb{R}^2$ a equação linear $T(x,y) = 1-t$.

3) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (2x+2y, -x-y, 2x+4y+z)\,.$$

a) (1.0) Determine $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$, com $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$.

b) (1.0) Determine os valores próprios de T e diga se T é diagonalizável.

c) (0.5) Verifique se T é uma projecção e diga se é ortogonalmente diagonalizável.

4) (1.0) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Determine $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétrica tal que

$$\operatorname{tr} A = 2 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{N}(A) = L\left(\{(1,1)\}\right).$$

5) (0.5) Considere em $\mathcal{P}_1$ um produto interno $\langle , \rangle$ para o qual

$$\|1+t\| = 2 \qquad \text{e} \qquad (L(\{2+2t\}))^{\perp} = L(\{5+t\}).$$

Determine $\langle 1+t, t\rangle$.

6) (0.5) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes simétricas com A definida positiva. Mostre que existe uma matriz C tal que $CAC^T = I$ e CBC^T é uma matriz diagonal.